

# 光传输的路径积分与符号表示

Dezeming Family

2022 年 9 月 15 日

DezemingFamily 系列文章和电子书**全部都有免费公开的电子版**，可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列电子书，可以从我们的网站 [<https://dezeming.top/>] 找到最新的版本。对文章的内容建议和出现的错误也欢迎在网站留言。

本文是对 [1] 论文的详细解读，该论文可以说是渲染必读论文，但有些符号表示和描述可能对初学者并不友好，由于里面介绍的几种重要技术，例如双向路径追踪、多重重要性采样以及 Metropolis 方法都是非常重要的，因此我打算写一下本论文的解读，作为构建“高端图形渲染学习体系”的一个重要组成部分。

由于论文 [1] 篇幅过长，为了减少 Latex 编译的时间以及更好把控不同部分的内容，我将整个论文划分为了多本小册子来进行讲解。

本文的预备知识：**蒙特卡洛方法、蒙特卡洛光线追踪**（可以看 Peter Shirley 的光线追踪三本小书）、**BSDF 模型、路径追踪、向量空间**。

# 目录

<b>一 基本内容介绍</b>	<b>1</b>
1.1 传输方程的三点形式	1
1.2 路径积分方程	1
<b>二 路径积分形式与符号描述</b>	<b>3</b>
2.1 路径采样	3
2.2 路径采样概率密度之间的转换关系	3
2.3 路径采样的限制	4
2.4 Heckbert 正则表达式	4
2.5 全路径符号的正式定义	5
2.6 把光源和传感器解释为散射事件	6
2.7 局部路径采样的局限	7
2.8 非局部采样的方法	8
<b>三 本文小结</b>	<b>9</b>
<b>参考文献</b>	<b>9</b>

# 一 基本内容介绍

本文主要是 [1] 的第八章节的内容。

[1] 的第五六七章涉及非对称 BSDF 与统一的光传输符号表示等内容，我们暂时放到后面介绍，当前最重要的工作就是先把路径积分给导出，这个学习顺序可能比直接学习一些基础结构要好很多。

测量的基本形式是：

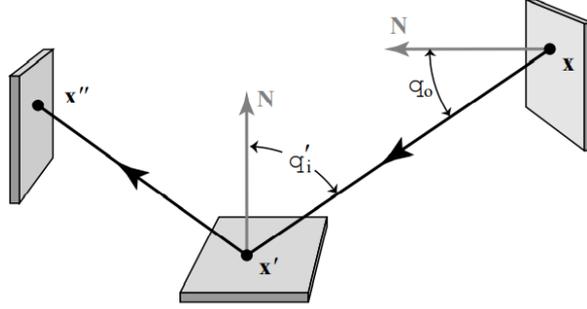
$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x}) \quad (一.1)$$

其中， $\mu$  是路径上的测量， $f_j$  是测量贡献函数 (measurement contribution function)。

## 1.1 传输方程的三点形式

设  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  和  $\mathbf{x}' \in \mathcal{M}$  都是表面上的点。定义  $L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') = L(\mathbf{x}, \omega)$ ，这里的  $\omega = \widehat{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}$  是一个单位向量。以及重写 BSDF 函数：

$$f_s(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') = f_s(\mathbf{x}', \omega_i \rightarrow \omega_o) \quad (一.2)$$



这样，三点式的光传输方程就可以写为：

$$L(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') = L_e(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') + \int_{\mathcal{M}} L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') f_s(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}'') G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') dA(\mathbf{x}) \quad (一.3)$$

我们可以看出（下面的式子我们以前都解释过）：

$$d\sigma_{\mathbf{x}'}^{\perp}(\omega_i) = d\sigma_{\mathbf{x}'}^{\perp}(\widehat{\mathbf{x} - \mathbf{x}'})) = G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') dA(\mathbf{x}) \quad (一.4)$$

$$G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') = V(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') \frac{|\cos(\theta_o) \cos(\theta'_i)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2} \quad (一.5)$$

我们也可以重写测量方程 ( $W_e^{(j)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') = W_e^{(j)}(\mathbf{x}', \omega)$ )，其中  $\mathbf{x}'$  是位于传感器上的点：

$$I_j = \int_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} W_e^{(j)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') L(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') dA(\mathbf{x}) dA(\mathbf{x}') \quad (一.6)$$

## 1.2 路径积分方程

测量的基本形式是：

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x}) \quad (一.7)$$

令  $k$  表示路径长度（散射的次数）， $\Omega_k$  表示长度为  $k$  的路径的集合，也就是  $\bar{x} = \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k$ 。其中  $1 < k < \infty$ ，且对于任意  $i$ ， $\mathbf{x}_i \in \mathcal{M}$ 。定义面积乘积测量  $\mu_k$ ：

$$\mu_k(D) = \int_D dA(\mathbf{x}_0) \dots dA(\mathbf{x}_k) \quad (一.8)$$

其中， $D \subset \Omega_k$  是路径集， $\mu_k$  是一个乘积测量，把它的定义可以写为：

$$d\mu_k(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k) = dA(\mathbf{x}_0) \dots dA(\mathbf{x}_k) \quad or \quad \mu_k = \underbrace{A \times \dots \times A}_{k \text{ times}} \quad (一.9)$$

然后定义路径空间  $\Omega$ :

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \quad (一.10)$$

把面积乘积测量  $\mu$  扩展到空间, 令:

$$\mu(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(D \cap \Omega_k) \quad (一.11)$$

也就是说所有路径集合的测量, 就是所有的每个路径的测量的和。

我们从测量方程递归地扩展为传输方程:

$$\begin{aligned} I_j &= \int_{\mathcal{M}^2} L_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1) \\ &\quad \cdot W_e^{(j)}(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) dA(\mathbf{x}_0) dA(\mathbf{x}_1) \\ &+ \int_{\mathcal{M}^3} L_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1) f_s(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) G(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2) \\ &\quad \cdot W_e^{(j)}(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) dA(\mathbf{x}_0) dA(\mathbf{x}_1) dA(\mathbf{x}_2) \\ &+ \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathcal{M}^{k+1}} L_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1) \prod_{i=1}^{k-1} f_s(\mathbf{x}_{i-1} \rightarrow \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1}) G(\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}_{i+1}) \\ &\quad \cdot W_e^{(j)}(\mathbf{x}_{k-1} \rightarrow \mathbf{x}_k) dA(\mathbf{x}_0) \dots dA(\mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

我们根据下面单独拎出一个路径来解释上式。

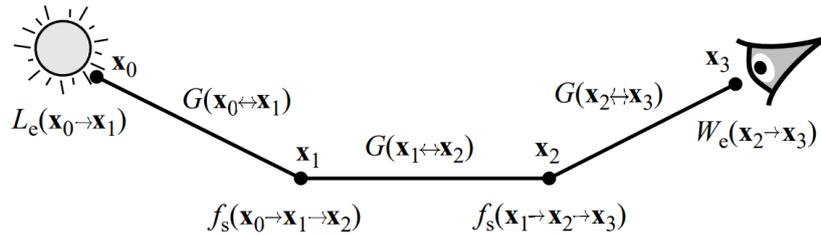
考虑测量函数:

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x}) \quad (一.12)$$

假如  $\bar{x} = \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3$ , 我们有:

$$\begin{aligned} f_j(\bar{x}) &= L_e(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1) f_s(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2) \\ &\quad \cdot G(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2) f_s(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3) W_e^{(j)}(\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3) \end{aligned}$$

函数  $f_j$  叫做测量贡献函数 (measurement contribution function)。



也就是说, 传感器的测量分解为了直接射入传感器的测量, 加上散射一次以后射入传感器的测量, 加上散射两次以后射入传感器的测量, 以此类推。

## 二 路径积分形式与符号描述

估计测量函数可以使用蒙特卡洛方法：

$$I_j \approx \frac{f_j(\bar{X})}{p(\bar{X})}$$

$$I_j = \int_{\Omega} f_j(\bar{x}) d\mu(\bar{x}) \quad (二.1)$$

概率密度  $p(\bar{X})$  取决于这个路径是如何生成的。

### 2.1 路径采样

我们介绍一种路径采样算法，叫做局部路径采样 (local path sampling algorithms)，这个算法根据局部信息（比如 BSDF）一次生成一个顶点。

这种算法有三个机制：

- 顶点可以根据场景表面的先验分布来选择，例如在光源上采样一个顶点，出射辐射度正比于采样的概率密度（即越亮的光源越容易被采样到）。类似地，该技术可用于对有限孔径透镜上的初始顶点进行采样。
- 根据表面 BSDF 来采样一个方向，找到沿着该方向相交的最近的表面点。
- 第三种机制是连接两个已经存在的顶点，然后判断这两个顶点是否相互可见，而不是生成新的顶点。

### 2.2 路径采样概率密度之间的转换关系

概率密度函数可以通过概率求导得到：

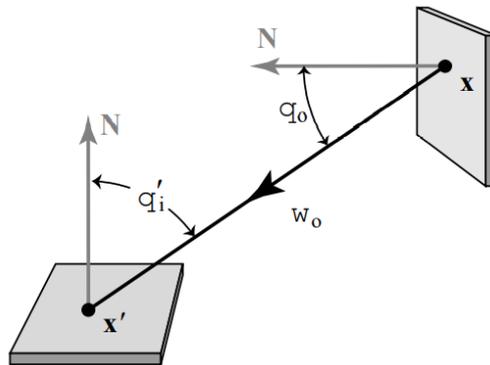
$$p(\bar{x}) = \frac{dP}{d\mu}(\bar{x}) \quad (二.2)$$

给定一个路径  $\bar{x} = \mathbf{x}_0 \cdots \mathbf{x}_k$ ，可以扩展到：

$$p(\bar{x}) = \frac{dP}{d\mu}(\mathbf{x}_0 \cdots \mathbf{x}_k)$$

$$= \prod_{i=0}^k \frac{dP}{dA}(\mathbf{x}_i) \quad (二.3)$$

用于在面积概率和方向概率之间转换的几何示意图：



我们设当前点为  $\mathbf{x}$ ，我们希望采样到的点是  $\mathbf{x}'$ 。假如我们给定一个概率密度  $p(\omega_o)$ （注意这个概率密度是与立体角采样相关的，采样方法并没有限制，可以根据 BSDF 来采样），为了计算与表面有关的密度  $p(\mathbf{x}')$ ，我们必须根据  $p(\omega_o)$  来转换过去。这两个密度是相关的：

$$\frac{dP}{dA}(\mathbf{x}') = \frac{dP}{d\sigma}(\omega_o) \frac{d\sigma(\omega_o)}{dA(\mathbf{x}')}$$

$$\implies p(\mathbf{x}') = p(\omega_o) \left( \frac{|\cos(\theta'_i)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2} \right) \quad (二.4)$$

根据上式来计算整条路径的概率密度  $p(\bar{x})$  就会显得比较直接。我们考虑每条路径产生的顶点的概率，然后把这些概率密度  $dP/dA$  相乘，就能得到生成整条路径的概率密度了。关于路径如何产生是几乎没有限制的：要么从镜头产生，要么从光源产生，要么从两个方向都产生（双向路径追踪）。

关于与投影立体角有关的概率密度分布，给定一个存在的顶点  $\mathbf{x}$ ，令  $p(\omega_o)$  和  $p^\perp(\omega_o)$  分别是原来的概率密度与投影立体角相关的概率密度：

$$\begin{aligned} d\sigma^\perp(\omega_o) &= |\omega_o \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})| d\sigma(\omega_o) \\ \frac{dP}{d\sigma^\perp}(\omega_o) &= \frac{dP}{d\sigma}(\omega_o) \frac{d\sigma(\omega_o)}{d\sigma^\perp(\omega_o)} \\ \implies p^\perp(\omega_o) &= p(\omega_o) \frac{1}{\cos(\theta_o)} \end{aligned} \quad (二.5)$$

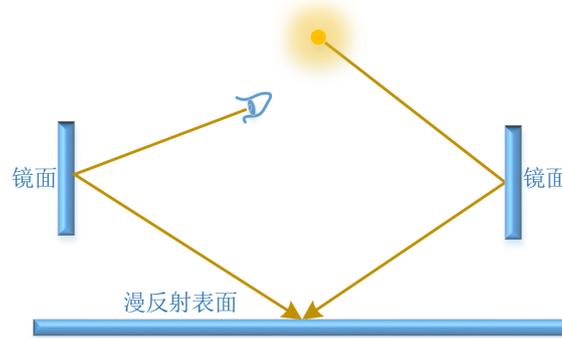
把上式跟前面的立体角和表面积密度相关的内容合并在一起：

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}') &= p^\perp(\omega_o) \left( \frac{|\cos(\theta_o)| |\cos(\theta'_i)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2} \right) \\ &= p^\perp(\widehat{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}) G(\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (二.6)$$

上式就是表面积概率密度与投影立体角相关的概率密度之间的转换关系。

### 2 3 路径采样的限制

现有的很多路径采样方法都有很多限制，例如如果允许点光源和完美的镜面，那么有些传输路径就可能不会被采样到。比如，考虑一个点光源发出的光被完美的镜面反射，在一个漫反射表面上形成一个焦散：



在上图中，点光源焦散无法从镜子中看到。

### 2 4 Heckbert 正则表达式

Heckbert 引入了正则表达式来区分路径。

在这里，会假设光的反射是理想漫反射和理想镜面反射的组合（比如百分之 50 的光被漫反射，百分之 10 的光被镜面反射，剩下的光被吸收）。

用  $L$  表示第一个顶点（从光  $L$  处发出），用  $E$  表示最后一个顶点， $S$  表示镜面反射的顶点， $D$  表示漫反射的顶点， $S$  或  $D$  都表示散射事件。在正则表达式中，上标  $+$  表示至少发生一次事件，上标  $*$  表示可能发生 0 次或者以上次数的的事件， $A|B$  表示要么发生  $A$  事件要么发生  $B$  事件， $\epsilon$  表示空字串。用括号  $()$  来表示一个组，比如  $A(A|B)$  表示要么发生  $AA$  要么发生  $AB$ 。给一个例子： $L(S|D)^*E$  表示从光发出，可能直接射入人眼或者散射几次以后射入人眼的光路径。

我们把材质进行扩展，对于非完全镜面的材质来说：

$$f_s(\mathbf{x}_{i-1} \rightarrow \mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_{i+1}) < \infty \quad (二.7)$$

它的反射类型定义为  $D$ 。除此之外，也就是镜面反射或者镜面折射，定义为  $S$ 。

Heckbert 理论只描述光沿着一条路径散射，我们扩展到更自然的方式。

光源可以表示为两个字母的组合： $(S|D)(S|D)$ ，其中，第一个  $(S|D)$  中， $D$  表示有限面积光源， $S$  表示零面积光源（比如点光源、方向光源）；第二个  $(S|D)$  中， $D$  表示发光的方向是有一个立体角范围的， $S$

表示发光的方向只是一个方向，没有范围（测量为 0）。因此我们用  $LSD$  来表示点光源，即这里的  $L$  不表示一个真实的顶点，只是一个光从光源开始发射的标志。

同理，我们用  $(S|D)(S|D)E$  来表示传感器。第一个字符表示传感器的方向敏感性，即它是对一个立体角度范围的光敏感还是只对一个固定方向的光敏感；第二个字符表示传感器的表面积，这个和光源的第一个字母有着相同的功能。

太阳一般被认为是一个无穷远处的点光源，也就是说它发的光射到地球上可以看做一个方向光。

我们给出一些光源和传感器的具体例子：

- $LDD$ : 一个漫反射发光球、漫反射面光源。
- $LDS$ : 阳光透过窗户照射到屋子里，把窗户看成光源。
- $LSD$ : 一个点光源（或者点光源手电筒）。
- $LSS$ : 一束激光。
- $DDE$ : 一个有限孔径的镜头。
- $SDE$ : 正交投影镜头（图像平面位于场景内，而不是无限远的位置）。注意这里正交投影说明只要光沿着相机朝向的反方向射入到镜头的区域面积内，就能测量到值。
- $DSE$ : 针孔镜头。要想测量到光，光的入射方向可以是一个范围，但是必须要穿过镜头所在点。
- $SSE$ : 理想的光斑计 (spot meter)，用以测量沿单个给定空间传输方位的光线的辐射。

我们给一个完整的例子： $LDDS^*DDE$ ，表示从面光源发出的光，经过零次或以上次数的镜面反射，然后到达有限孔径的相机。我们把这种扩展的更自然的方式称为全路径正则表达式 (full-path regular expression)。

## 2.5 全路径符号的正式定义

我们把光源的发射辐射度函数分为两项：即  $L_e^{(0)}$ （辐射度的空间部分）和  $L_e^{(1)}$ （辐射度的时间部分）。 $L_e^{(0)}$  因子可以定义为：

$$L_e^{(0)}(\mathbf{x}) = \int_{S^2} L_e(\mathbf{x}, \omega) d\sigma^\perp(\omega) \quad (二.8)$$

这一项表示出射辐射度（每单位面积的发射功率）。

$L_e^{(1)}$  因子可以定义为：

$$L_e^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) = L_e(\mathbf{x}, \omega) / L_e^{(0)}(\mathbf{x}) \quad (二.9)$$

这一项表示在  $\mathbf{x}$  点的发射辐射度

由上面的结果可知：

$$L_e(\mathbf{x}, \omega) = L_e^{(0)}(\mathbf{x}) L_e^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) \quad (二.10)$$

也就是说采样光的发射能量可以分为两步，一是先采样一个点，二是采样一个方向。

注意根据定义：

$$\int_{S^2} L_e^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) d\sigma^\perp(\omega) = 1 \quad (二.11)$$

可以看出，对于给定的  $\mathbf{x}$ ， $L_e^{(1)}$  是  $\omega$  的概率密度函数。

对于光源符号，例如  $LDD$ 、 $LSD$  等，我们设  $LXY$ ，它具有下面的意义：

$$X = \begin{cases} D & \text{if } L_e^{(0)}(\mathbf{x}_0) < \infty \\ S & \text{otherwise} \end{cases} \quad (二.12)$$

$$Y = \begin{cases} D & \text{if } L_e^{(1)}(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1) < \infty \\ S & \text{otherwise} \end{cases} \quad (二.13)$$

类似的我们也可以定义传感器符号，将传感器  $W_e$  分解为  $W_e^{(0)}$  和  $W_e^{(1)}$  的乘积：

$$\begin{aligned} W_e^{(0)}(\mathbf{x}) &= \int_{S^2} W_e(\mathbf{x}, \omega) d\sigma^\perp(\omega) \\ W_e^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) &= W_e(\mathbf{x}, \omega) / W_e^{(0)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (二.14)$$

这种形式可以定义 YXE：

$$Y = \begin{cases} D & \text{if } W_e^{(1)}(\mathbf{x}_{n-1} \rightarrow \mathbf{x}_n) < \infty \\ S & \text{otherwise} \end{cases} \quad (二.15)$$

$$X = \begin{cases} D & \text{if } W_e^{(0)}(\mathbf{x}_n) < \infty \\ S & \text{otherwise} \end{cases} \quad (二.16)$$

## 2.6 把光源和传感器解释为散射事件

如果  $S$  和  $D$  符号具有一致的含义，则更容易对这些正则表达式进行推理，我们将  $S$  和  $D$  解释为散射事件。我们在路径的每一端引入一个虚拟顶点，并扩展 BSDF 的定义，以描述进出这些虚拟顶点的光的传输。

把发射描述为散射组件需要两步，我们首先描述方向组件，然后再描述空间组件。

定义路径顶点  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k$ ，在前后各加一个虚拟顶点  $\Psi_L$  和  $\Psi_W$  来作为新的路径端点。因此，一个完整的路径形式就是：

$$\Psi_L \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \Psi_W \quad (二.17)$$

### 方向组件描述为散射事件

我们下面就看一下如何将发射函数  $L_e$  和  $W_e$  的方向组件描述为散射事件。

$\Psi_L$  其实是  $\mathbf{x}_{-1}$ ， $\Psi_W$  是  $\mathbf{x}_{k+1}$ 。我们假设光只会在  $\Psi_L$  处发出，而不是在发光表面直接发出光。也就是说光沿着虚拟光线方向发出： $\Psi_L \rightarrow \mathbf{x}$ ，然后从  $\mathbf{x}$  处散射为实际光线： $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ 。 $W_e$  和  $\Psi_W$  也是同理。最后可以写出下面的符号：

$$\begin{aligned} L_e(\Psi_L \rightarrow \mathbf{x}) &= L_e^{(0)}(\mathbf{x}) \\ f_s(\Psi_L \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') &= L_e^{(1)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \\ f_s(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \Psi_W) &= W_e^{(1)}(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}) \\ W_e(\mathbf{x} \rightarrow \Psi_W) &= W_e^{(0)}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

注意前面描述过：

$$\int_{S^2} L_e^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) d\sigma^\perp(\omega) = 1 \quad (二.18)$$

所以这种过渡非常自然： $L_e(\Psi_L \rightarrow \mathbf{x})$  相当于到达  $\mathbf{x}$  的总能量，而总能量会在  $\mathbf{x}$  进行散射，散射的分布就可以用  $L_e^{(1)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')$  来描述。

### 空间组件描述为散射事件

现在我们展示发射的空间组件部分如何描述为  $\Psi_L$  和  $\Psi_W$  的散射事件。

假设发射的光最初被聚集在单个虚拟光线  $\Psi_L \rightarrow \Psi_L$  上，然后光在  $\Psi_L$  位置被散射，来得到光  $\Psi_L \rightarrow \mathbf{x}$ ，然后就是第二次散射过程  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ 。

对于相机也是如此，散射的光  $\mathbf{x} \rightarrow \Psi_W$  进入到单个光线  $\Psi_W \rightarrow \Psi_W$ 。

上面的内容与下面的符号定义有关。首先我们定义  $\Phi_L$  和  $\Phi_W$  分别来表示总功率和总的发射重要性：

$$\begin{aligned} \Phi_L &= \int_{\mathcal{M}} L_e^{(0)}(\mathbf{x}) dA(\mathbf{x}) \\ \Phi_W &= \int_{\mathcal{M}} W_e^{(0)}(\mathbf{x}) dA(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

然后我们改变发射函数，使得光和重要性从单个虚拟光线上发出：

$$L_e(\Psi_L \rightarrow \Psi_L) = \Psi_L$$

$$W_e(\Psi_W \rightarrow \Psi_W) = \Psi_W$$

最后，我们扩展 BSDF 来描述散射光  $\Psi_L \rightarrow \mathbf{x}$  和重要性  $\mathbf{x} \rightarrow \Psi_W$ ：

$$f_s(\Psi_L \rightarrow \Psi_L \rightarrow \mathbf{x}) = L_e^{(0)}(\mathbf{x})/\Phi_L$$

$$f_s(\mathbf{x} \rightarrow \Psi_W \rightarrow \Psi_W) = W_e^{(0)}(\mathbf{x})/\Phi_W$$

这些 BSDF 函数都是归一化的（积分为 1）。

最后把所有的符号总结一下：

$$f_s(\Psi_L \rightarrow \Psi_L \rightarrow \mathbf{x}) = L_e^{(0)}(\mathbf{x})/\Phi_L$$

$$f_s(\Psi_L \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') = L_e^{(1)}(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')$$

-----

$$f_s(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \Psi_W) = W_e^{(1)}(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x})$$

$$f_s(\mathbf{x} \rightarrow \Psi_W \rightarrow \Psi_W) = W_e^{(0)}(\mathbf{x})/\Phi_W$$

## 2.7 局部路径采样的局限

局部路径采样 (local path sampling) 只能采样到包含子串  $DD$  的路径，不包含这个子串的路径是采样不到的。

我们令  $\bar{x}$  是通过局部采样算法生成的路径，设测量贡献函数  $f_j(\bar{x})$  非 0，则如果这个路径上有一个镜面顶点  $\mathbf{x}_i$ ，则  $\mathbf{x}_{i+1}$  或者  $\mathbf{x}_{i-1}$  一定有一个是通过在  $\mathbf{x}_i$  处采样 BSDF 得到的（简单思考一下就能明白这是正确的）。

根据上面可以推出，令  $\bar{x}$  是一条局部采样算法生成的路径，假设这条路径中包含的子路径  $\mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_j$  具有  $DS^+D$  的形式（即在漫反射中有一次以上的镜面反射），则  $\mathbf{x}_i$  或者  $\mathbf{x}_j$  一定有一次是通过采样 BSDF 得到的。

对于局部采样算法得到的相机测量贡献非 0 的路径  $\bar{x}$ ， $\bar{x}$  具有下面的形式：

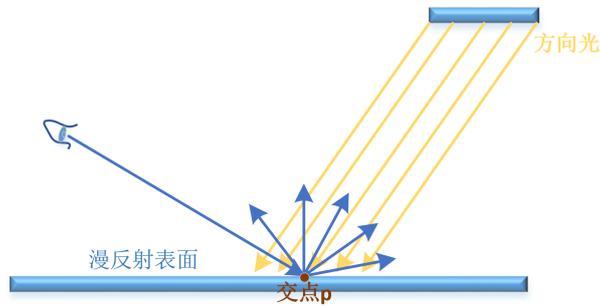
$$L(S|D)^*DD(S|D)^*E \tag{二.19}$$

即它必须包含子串  $DD$ ，另外，局部采样得到的任意路径都会有这种形式。我们可以假设有这么一条路径： $LSDSDSDE$ ，即从点光源发光开始采样（我们假设路径是从光源开始采样的），而相机最终是正交投影相机，我们看最后四个字母  $DSDE$ ，表示从漫反射表面采样到镜面反射方向  $S$ ，这是不可能的，因此这并不合法。也就是说，局部路径采样最大的问题是，漫反射点要想发射到镜面系数方向（某方向 BSDF 无穷大），则不能依赖局部路径采样。

还比如  $LSDSDSDE$ ，即点光源直接射到正交投影相机，当从相机开始采样时，相机光线是固定方向，根据方向采样无法采样到点光源，而根据点光源到相机顶点无法采样到镜面方向（正交投影相机的相机光线方向）。对于普通的路径追踪（从眼睛开始采样），只能采样到下面的路径形式：

$$L(S|D)DD(S|D)^+E \tag{二.20}$$

即眼睛发出的采样光线可以采样到点光源，但需要经过漫反射表面。为什么不能采样到  $LDS$  这种光源（有面积的方向光）呢？因为如下图：



漫反射表面采样方向采样到方向光的方向的概率为 0，而从方向光的光源处采样照射到交点  $p$  的概率也是 0，因此  $LDS$  类型的光也是没法采样到的。

## 2.8 非局部采样的方法

我们可以对路径做一些限制，比如只使用漫反射面光源，路径开始于  $LDD$ ；只允许有限孔径镜头传感器，路径结束于  $DDE$ ；不允许完美镜面反射材质。但这样有些光源和材质类型就不能集成到渲染器中，因此，另一个策略是使用更好的采样策略。

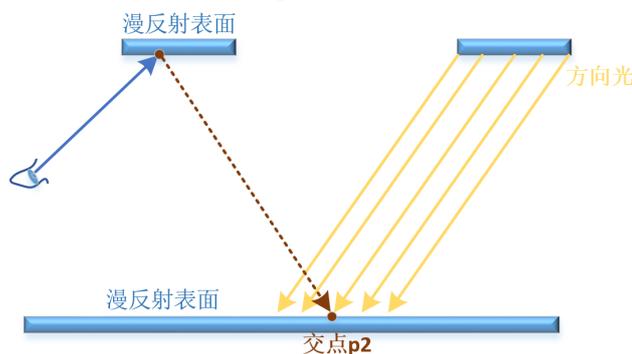
我们把  $D$  或者  $\Psi_L$ 、 $\Psi_W$  类型的顶点叫做链分隔符 (chain separator)。一个链 (chain) 就是被链分隔符界定的子路径 (但是不包括  $L$  和  $E$ )。比如  $LDSDDSSDSE$ ：

- 第一条链是  $DSD$ ，从虚拟顶点  $\Psi_L$  发射到  $x_0$  的虚拟边 (imaginary edge)，以及从  $x_0$  到  $x_1$  的实际边 (real edge)。
- 第二条链是  $DD$ ，从  $x_1$  到  $x_2$  的实际边 (real edge)。
- 第三条链是  $DSSD$ ，从  $x_2$  到  $x_5$ 。
- 最后一条链是  $DS$ ，是从  $x_5$  发射到  $\Psi_W$  的虚拟边 (imaginary edge)。

对于两个  $D$  类型的顶点  $x$  和  $x'$ ，我们需要产生一个或者多个镜面顶点来把它们连接起来，如果直接连接  $x$  和  $x'$ ，相当于测试这两个顶点之间的可见性，如果可见则产生一条  $DD$  边。我们把这种镜面点连接的策略叫做连接符 (connectors)。

如果有一个平面镜，可以在上面找一个反射点  $y$ ，构成  $xyx'$ ，如果这个点存在 (保证镜面反射)，且  $xy$  和  $yx'$  都没有遮挡，则可以构造出一个  $DSD$  路径。

连接符可以实现平行光源  $LDS$  或者正交投影相机  $SDE$ ，比如下图，虚拟顶点  $\Psi_L$  和一个实顶点  $x$  可以通过将  $x$  投射到  $\Psi_L$  发出的光相交的表面点  $p_2$ ：



### 三 本文小结

下一篇文章中，我们会重点介绍多重重要性采样算法，该算法对提高蒙特卡洛方法的效率很有效，也是双向路径追踪中有效组合路径权重的很重要的计算方法。

### 参考文献

- [1] Veach E . Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation[J]. Ph.d.thesis Stanford University Department of Computer Science, 1998.
- [2] Arvo, J. [1995]. Analytic Methods for Simulated Light Transport, PhD thesis, Yale University.