双向路径追踪架构总结

Dezeming Family

2022 年 10 月 28 日

DezemingFamily 系列文章和电子书**全部都有免费公开的电子版**，可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列电子书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新的版本。对文章的内容建议和出现的错误也欢迎在网站留言。

本文是对 [1] 论文的详细解读，该论文可以说是渲染必读论文，但有些符号表示和描述可能对初学者并不友好，由于里面介绍的几种重要技术，例如双向路径追踪、多重重要性采样以及 Metropolis 方法都是非常重要的，因此我打算写一下本论文的解读，作为构建“高端图形渲染学习体系”的一个重要组成部分。

由于论文 [1] 篇幅过长，为了减少 Latex 编译的时间以及更好把控不同部分的内容，我将整个论文划分为了多本小册子来进行讲解。

本文的预备知识：蒙特卡洛方法、蒙特卡洛光线追踪（可以看 Peter Shirley 的光线追踪三本小书）、BSDF 模型、路径追踪、向量空间。

目录

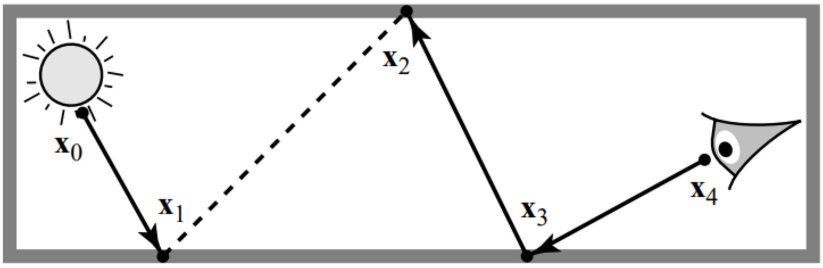
一 双向路径追踪架构

1 1 路径权重计算

假如 $\overline{x} = \mathbf{x}_0\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$，我们得到：

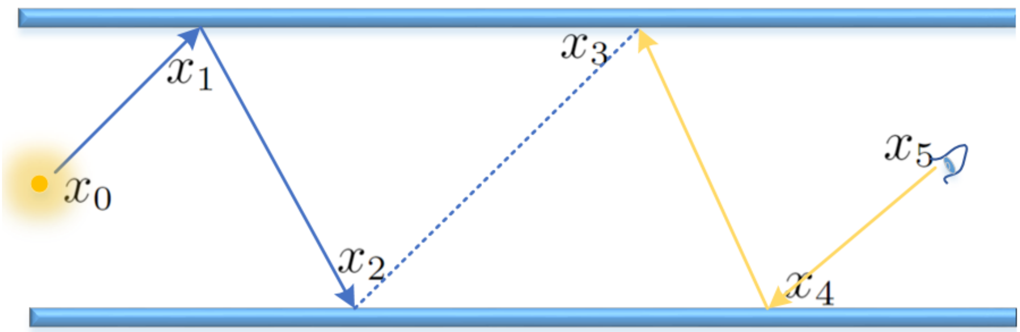
$$\begin{aligned} f_j(\overline{x}) = L_e(\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1)G(\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1)f_s(\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2) \\ \cdot G(\mathbf{x}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_2)f_s(\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_3) \\ \cdot G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3)f_s(\mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_3 \to \mathbf{x}_4)G(\mathbf{x}_3 \leftrightarrow \mathbf{x}_4)W_e^{(j)}(\mathbf{x}_3 \to \mathbf{x}_4) \end{aligned} \tag{一.1}$$

下图中，$\mathbf{x}_0\mathbf{x}_1$ 是光源子路径得到的，$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$ 是相机子路径得到的（$\mathbf{x}_4$ 在相机镜头上），把这两条路径连接起来就能得到完整的路径：



1 2 非加权路径

设路径图示为：



不加权贡献可以写为 $C^*_{s,t}$：

$$C^*_{s,t} \equiv \frac{f_j(\overline{x}_{s,t})}{p_{s,t}(\overline{x}_{s,t})} \equiv \alpha^L_s c_{s,t} \alpha^E_t \tag{一.2}$$

先看光源路径，注意采样第 i 个顶点的权重设为 α^L_i，因此：

$$\begin{aligned} \alpha^L_1 &= \frac{L_e^{(0)}(\mathbf{x}_0)}{P_A(\mathbf{x}_0)} \\ \alpha^L_2 &= \frac{f_s(\mathbf{x}_{-1} \to \mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1)} \frac{L_e^{(0)}(\mathbf{x}_0)}{P_A(\mathbf{x}_0)} \\ \alpha^L_3 &= \frac{f_s(\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2)} \frac{f_s(\mathbf{x}_{-1} \to \mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}_1)} \frac{L_e^{(0)}(\mathbf{x}_0)}{P_A(\mathbf{x}_0)} \end{aligned}$$

再看相机路径（注意 $\mathbf{x}_6$ 与 $\mathbf{x}_{-1}$ 都是补充的假想点）：

$$\begin{aligned} \alpha^E_1 &= \frac{W_e^{(0)}(\mathbf{x}_5)}{P_A(\mathbf{x}_5)} \\ \alpha^E_2 &= \frac{f_s(\mathbf{x}_4 \to \mathbf{x}_5 \to \mathbf{x}_6)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_5 \to \mathbf{x}_6)} \frac{W_e^{(0)}(\mathbf{x}_5)}{P_A(\mathbf{x}_5)} \\ \alpha^E_3 &= \frac{f_s(\mathbf{x}_3 \to \mathbf{x}_4 \to \mathbf{x}_5)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_4 \to \mathbf{x}_5)} \frac{f_s(\mathbf{x}_4 \to \mathbf{x}_5 \to \mathbf{x}_6)}{P_{\sigma^\perp}(\mathbf{x}_5 \to \mathbf{x}_6)} \frac{W_e^{(0)}(\mathbf{x}_5)}{P_A(\mathbf{x}_5)} \end{aligned}$$

最后是两个路径的连接点 $c_{3,3}$：

$$c_{3,3} = f_s(\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_3) G(\mathbf{x}_2 \leftrightarrow \mathbf{x}_3) f_s(\mathbf{x}_2 \to \mathbf{x}_3 \to \mathbf{x}_4) \tag{一.3}$$

1 3　路径权重

幂启发式的权重：

$$w_k(p_s) = \frac{p_s^2}{\sum_i p_i^2} = \frac{1}{\sum_i (p_i/p_s)^2} \tag{一.4}$$

注意这个权重是对于相同的路径长度 $k = s + t - 1$ 的所有路径形式来计算的。

人眼观测到的光为：直接射入人眼的部门 + 散射一次以后射入人眼的部分 + 散射两次以后射入人眼的部分 +...；对于路径长度为 k，表示光散射了 $k-1$ 次。因此，我们分别对光散射不同的次数来估计，然后把它们加起来，就能得到最终的渲染结果。所以，我们只需要分别对每个长度为 k 的路径中的那些样本进行加权组合，得到长度为 k 的路径的估计结果。把不同的长度为 k 的路径估计的结果相加，得到最终结果。

二　重要性流与辐射度流

光传输方程写为：

$$L_o(\mathbf{x}, \omega_o) = L_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\mathcal{S}^2} L_o(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_s(\mathbf{x}, \omega_i \to \omega_o) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{二.1}$$

传输法则同样可以应用于传感器。一个场景中可以有很多个光源，同样也可以有很多传感器。平衡重要性函数 (equilibrium importance function)$W(\mathbf{x}, \omega)$ 可以根据重要性传输公式得到：

$$W(\mathbf{x}, \omega_o) = W_e(\mathbf{x}, \omega_o) + \int_{\mathcal{S}^2} W(\mathbf{x}_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) f_s(\mathbf{x}, \omega_o \to \omega_i) d\sigma_{\mathbf{x}}^{\perp}(\omega_i) \tag{二.2}$$

注意这里的 BSDF 的方向是 $\omega_o \to \omega_i$，但由于重要性传输是光传输的逆过程，所以其实仍旧是光的入射方向到散射方向。

对于路径追踪，我们给定 ω_o 方向，通过根据 BSDF 来采样 ω_i 方向来逐步扩展路径。对于粒子追踪，给定的是 ω_i 方向，通过采样 ω_o 来扩展路径。

三　非对称散射问题

当光发生折射或者着色法向量被使用时，就会发生非对称散射。我们展示了如何在双向光传输算法中正确处理这些问题，即通过相应的伴随 BSDF。需要注意的是，非对称 BSDF 可能看起来不是很重要，但其实它可能会因为处理不当引入大量误差。

着色法向量 N_s（模型表面本身的法向量记做 N_g）的作用一般是，通过法向量贴图等工具使得光滑的表面变粗糙，添加一些额外的细节。着色法向量虽然很方便，但是并没有很好定义的物理偏差（它属于非物理材质组成部分），因此需要代码来控制。

3 1　非对称散射问题的产生

对于折射，一般直接将入射方向 ω_i 映射为 ω_t，而不去考虑 BSDF 的计算。在做光线追踪时，要使用 BSDF 来估计，而当进行光粒子追踪时，则需要用伴随 BSDF。

前面说过，$f_s(\omega_i \to \omega_o)$ 是用来估计辐射度以及散射重要性粒子的；而伴随 BSDF $f_s^*(\omega_i \to \omega_o)$ 是用来估计重要性以及散射光粒子的。它们之间的关系是 $f_s(\omega_i \to \omega_o) = f_s^*(\omega_o \to \omega_i)$。非对称散射就是 $f_s(\omega_i \to \omega_o) \neq f_s(\omega_o \to \omega_i)$，导致采样光源子路径和相机子路径时不能使用同一个 BSDF 计算式。在实际程序中，只要认识到非对称散射可能存在的场景，并好好利用相应的伴随 BSDF。

3 2　经验主义模型与非对称性

考虑 Phong 照明的高光部分：

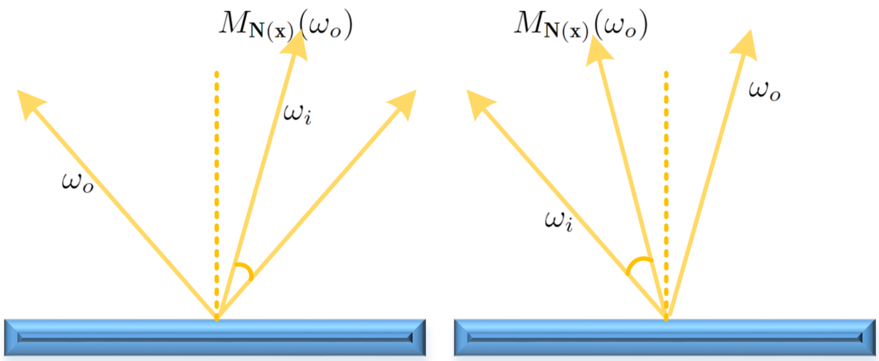
$$L_o(\omega_o) = \int_{\mathcal{H}_i^2} C_r \max(0, \omega_i \cdot M_{\mathbf{N}(\mathbf{x})}(\omega_o))^n L_i(\omega_i) d\sigma(\omega_i) \tag{三.1}$$

其中 $M_{\mathbf{N}(\mathbf{x})}(\omega_o)$ 表示方向为 ω_o 的光在法向量为 $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ 的镜面反射到的方向。由于 BSDF 是对投影立体角进行积分的，所以需要加上一个 cos 项：

$$L_o(\omega_o) = \int_{\mathcal{H}_i^2} \frac{C_r \max(0, \omega_i \cdot M_{\mathbf{N}(\mathbf{x})}(\omega_o))^n}{|\omega_i \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})|} L_i(\omega_i) |\omega_i \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})| d\sigma(\omega_i) \tag{三.2}$$

$$f_s(\omega_i \to \omega_o) = \frac{C_r \max(0, \omega_i \cdot M_{\mathbf{N}(\mathbf{x})}(\omega_o))^n}{|\omega_i \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})|} \tag{三.3}$$

如果没有 cos 项，Phong 模型的高光就是对称 BSDF：



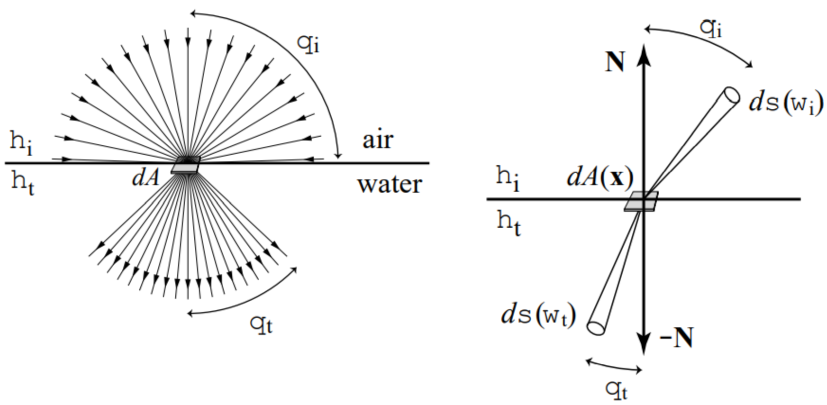
但是因为有了 cos 项，所以就不再是对称的 BSDF 了。

四　折射的非对称性

4 1　折射的 BSDF

我们导出了相应 BSDF 及其伴随的显式公式，并讨论了双向渲染算法的含义。假设在折射中，光全部都穿透了介质。

直观地说，当光进入折射率较高的介质时，相同的光能被压缩到较小的体积中。考虑一个小片段 $dA(\mathbf{x})$ 在半球 $\mathcal{H}_i^2$ 中有均匀辐射度照射进入。假设光以较高的折射率进入介质，穿过的光不会填充整个半球，如下图左：



入射光携带的功率在一个小片段 $dA(\mathbf{x})$ 上是：

$$d\Phi_i = L_i dA(\mathbf{x}) d\sigma^{\perp}(\omega_i) \tag{四.1}$$

类似地，出射光表示为：

$$d\Phi_t = L_t dA(\mathbf{x}) d\sigma^{\perp}(\omega_t) \tag{四.2}$$

因此，通过能量守恒：

$$L_t = \frac{d\sigma^{\perp}(\omega_i)}{d\sigma^{\perp}(\omega_t)} L_i \tag{四.3}$$

注意立体角的极坐标参数化以及 Snell 定律及其微分形式：

$$d\sigma^{\perp}(\omega) = \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \tag{四.4}$$

$$\eta_i \sin\theta_i = \eta_t \sin\theta_t \tag{四.5}$$

$$\eta_i \cos\theta_i d\theta_i = \eta_t \cos\theta_t d\theta_t \tag{四.6}$$

注意 $d\phi_i = d\phi_t$，上面的式子就能够推出入射和出射辐射度的关系是：

$$L_t = \frac{\eta_t^2}{\eta_i^2} L_i \tag{四.7}$$

注意这个推导关系是与光的频率相关的，如果按照波长相关，则 $L_t = \frac{\eta_t^3}{\eta_i^3} L_i$。

对于镜面反射：

$$\begin{aligned} L_o(\omega_o) &= \int_{\mathcal{S}^2} L_i(\omega_i) f_s(\omega_i \to \omega_o) |\omega_i \cdot \mathbf{N}| d\sigma(\omega_i) \\ f_s(\omega_i \to \omega_o) &= \frac{\delta_\sigma(\omega_i - M_{\mathbf{N}}(\omega_o))}{|\omega_i \cdot \mathbf{N}|} \end{aligned} \tag{四.8}$$

进而类比写出折射的 BSDF，这里注意折射公式 $\omega_i = R(\omega_t)$：

$$f_s(\omega_i \to \omega_t) = \frac{\eta_t^2}{\eta_i^2} \delta_{\sigma^{\perp}}(\omega_i - R(\omega_t)) \tag{四.9}$$

4 2 折射的伴随 BSDF

对于任意物理上合理的 BSDF，当发生的是折射事件时，BSDF 可以写为：

$$\frac{f_s(\omega_i \to \omega_o)}{\eta_o^2} = \frac{f_s(\omega_o \to \omega_i)}{\eta_i^2} \tag{四.10}$$

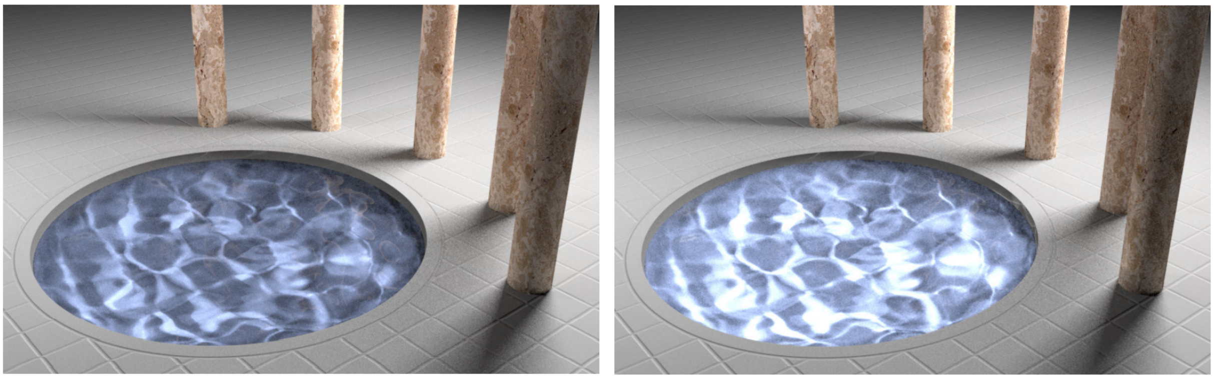
它的导出方法可见原文 [1] 的第六章。上式可以得到折射伴随 BSDF 的关系式：

$$\begin{aligned} f_s^*(\omega_i \to \omega_t) &= f_s(\omega_t \to \omega_i) \\ &= (\eta_i/\eta_t)^2 f_s(\omega_i \to \omega_t) \\ &= \delta_{\sigma^\perp}(\omega_i - R(\omega_t)) \end{aligned} \tag{四.11}$$

上式可以看出伴随 BSDF 中并没有 $(\eta_t/\eta_i)^2$ 项，也就是说重要性和光粒子在穿过折射面时不需要缩放（伴随 BSDF 是用来估计重要性以及散射光粒子的）。

4 3 结果与讨论

渲染结果如下：



左图表示正确的结果，右图是发射光粒子时乘以了 $(\eta_t/\eta_i)^2$ 项的结果，这样会使得焦散过亮（焦散是光从水表面折射到水池底部形成的光斑）。

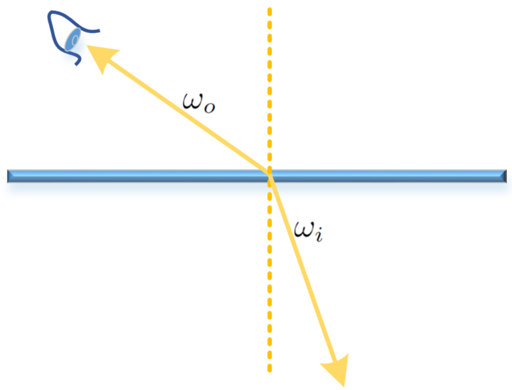
在 1989 年时 Hall 就指出了辐射度在计算折射时需要用 $(\eta_t/\eta_i)^2$ 项来缩放，但是当时在很多光线追踪系统中都忽略了。在论文原文中更进一步，指出了当追踪光路径时，不需要乘以该项。在 PBRT 中的 SpecularTransmission::Sample_f 函数中可以看到：

```
// Figure out which $\eta$ is incident and which is transmitted
bool entering = CosTheta(wo) > 0;
Float etaI = entering ? etaA : etaB;
Float etaT = entering ? etaB : etaA;
......
// Account for non-symmetry with transmission to different medium
if (mode == TransportMode::Radiance) ft *= (etaI * etaI) / (etaT * etaT)
    ;
```

也就是说当估计的是辐射度时，需要乘以该因子。注意上面乘以 $(\eta_i/\eta_t)^2$ 项是倒数是因为：

$$L_i = \frac{\eta_i^2}{\eta_t^2} L_t \Longrightarrow L_t = \frac{\eta_t^2}{\eta_i^2} L_i \tag{四.12}$$

比如下图，设 $\eta_i > \eta_t$。我们知道光从 ω_i 射入到 ω_o 会发散（注意 ω_o 所在半球假设在表面上方）：


ω_o
ω_i

五　着色法向量带来的非对称性

着色法向量看起来像是改变了几何结构，但其实它本质上是改变了 BSDF：

$$\overline{f}_s(\omega_i \to \omega_o) = f_{s,\mathbf{N}_s}(\omega_i \to \omega_o)\frac{|\omega_i \cdot \mathbf{N}_s|}{|\omega_i \cdot \mathbf{N}_g|} \tag{五.1}$$

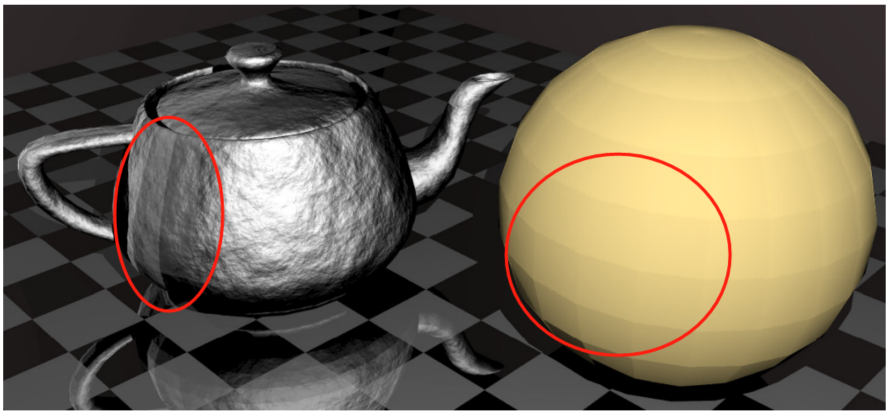
估计的出射辐射度为：

$$\begin{aligned} L_o(\omega_o) &= \int_{\mathcal{S}^2} L_i(\omega_i)\overline{f}_s(\omega_i \to \omega_o)|\omega_i \cdot \mathbf{N}_g|d\sigma(\omega_i) \\ &= \int_{\mathcal{S}^2} L_i(\omega_i)f_{s,\mathbf{N}_s}(\omega_i \to \omega_o)\frac{|\omega_i \cdot \mathbf{N}_s|}{|\omega_i \cdot \mathbf{N}_g|}|\omega_i \cdot \mathbf{N}_g|d\sigma(\omega_i) \end{aligned} \tag{五.2}$$

估计重要性为：

$$\begin{aligned} W_o(\omega_o) &= \int_{\mathcal{S}^2} W_i(\omega_i)\overline{f}^*_s(\omega_i \to \omega_o)|\omega_i \cdot \mathbf{N}_g|d\sigma(\omega_i) \\ &= \int_{\mathcal{S}^2} W_i(\omega_i)f_{s,\mathbf{N}_s}(\omega_o \to \omega_i)\frac{|\omega_o \cdot \mathbf{N}_s|}{|\omega_o \cdot \mathbf{N}_g|}|\omega_i \cdot \mathbf{N}_g|d\sigma(\omega_i) \end{aligned} \tag{五.3}$$

也就是说对于估计重要性时，后面的由着色法向量带来的 BSDF 的改变是没法被消除的。所以需要单独处理这种情况，而不能仅仅当成“表面的法向量被改变了”来处理。如果不注意着色法向量带来的问题，就会得到下面的结果。具体原因请见论文原文中的描述。



参考文献

[1] Veach E . Robust Monte Carlo Methods for Light Transport Simulation[J]. Ph.d.thesis Stanford University Department of Computer Science, 1998.

[2] Arvo, J. [1995]. Analytic Methods for Simulated Light Transport, PhD thesis, Yale University.