Real-Time Polygonal-Light Shading with Linearly Transformed Cosines

Dezeming Family

2022 年 12 月 22 日

正常字体：表示论文的基本内容解释。

粗体：表示需要特别注意的内容。

红色字体：表示容易理解错误或者混淆的内容。

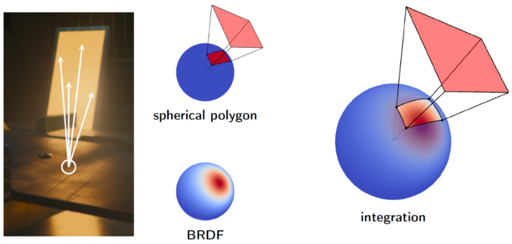
蓝色字体：表示额外增加的一些注释。

绿色字体：表示额外举的一些例子。

目录

abstract

Unity 的一个大作，用来实时渲染多边形光源，在当时引起了不小的轰动。本文其实主要目标就是解析地在球面上积分光源和 BRDFs（任意的 BRDFs）：



但是注意这种积分是不会包含阴影的，只包含光源罢了。

本文展示了对一个球面分布的方向向量应用线性变换（3×3 的矩阵）可以产生另一种球面分布，为此我们导出了一个闭式表达式。根据这种思想，我们就可以用任何球面分布来作为一个基 shape 来生成一个新的球面分布，该分布有参数化的 roughness，elliptic anisotropy（椭圆各向异性）和 skewness（偏度）。如果原始分布具有解析表达式 (analytic expression)、归一化 (normalization)、球面多边形上的积分和重要性采样，则这些特性将由线性变换分布所继承。

通过为初始分布选择一个 clamped cosine,我们可以获得一类分布,称为 Linearly Transformed Cosines(LTCs)，它提供了对基于物理的 BSDF 的良好的近似，使得在任意球面多边形上可以解析地积分。我们展示了如何使用这些特性在实时的多边形光源着色中。我们的技术是鲁棒的、快速的、准确的，而且很容易去实现。

一　Introduction

基于物理的着色要求积分光照方程，即积分 BRDF 和球面域的光照。我们在本文中着眼于多边形光源，即在球面多边形上积分 BRDF。尽管多边形光源理论上是最简单的光照模型，但它们在两个层面上仍然给渲染带来了困难：

- 在球面多边形上积分参数球面分布通常是困难的,即使是最简单的分布也是如此。例如,解析的 Phong 多边形积分成本高昂 [Arvo 1995]，球面高斯函数没有解析解 [Xu et al. 2014]。
- 很多基于物理的材质模型都不是简单的分布 [Hill et al. 2015]，它们具有复杂的形状，具有各向异性拉伸 (anisotropic stretching) 和偏度 (skewness)，需要表现出来才能使材料看起来逼真。

论文的 Sec.3 介绍了 Linearly Transformed Spherical Distributions (LTSDs)，这是一种新的球面分布，解决了这些问题。

我们从原来的球面分布出发，对其方向向量应用由 3×3 的矩阵表示的线性变换。这产生了一个参数化，允许我们修改原来的分布的形状，如粗糙度、椭圆各向异性和偏度，如图 (2) 所示。由于这种参数化，我们可以使用任何球面分布来创建具有不同基本形状的新的参数球面分布族，如图 (3) 所示。这些分布的主要特征是它们继承了原来的分布的几个特性，如归一化、任意球面多边形上的积分和重要性采样。

在 Sec.4，我们展示了为原来的分布使用 clamped cosine 来产生一个分布族，我们称为 Linearly Transformed Cosines(LTCs)，这提供了基于物理的 BRDFs 的很好的近似，这多亏了它们可以覆盖多类的球面形状。此外，因为 clamped cosine 分布是在任意球面多边形都可以解析地积分的，所以 LTCs 也可以。第 Sec.5 我们展示了如何在实时多边形光照着色应用中使用这个特性。

二　相关工作

2 1　多项式光着色

多边形照明的解析解目前仅限于类余弦 (cosine-like) 分布。在多边形域上积分一个 clamped cosine，即计算多边形的 irradiance，几个世纪前由 Lambert 解决，并在 Baum 等人 [1989] 引入到图形学中，在 Arvo[1995] 扩展到了 Phong 分布，即具有控制分布锐度 (sharpness) 的指数的余弦（对 cos 项的指数，即

Phong 的镜面项），Snyder[1996] 提供了更详细的实现方案。然而该方案计算比较复杂，在实时游戏中常用更廉价的替代方案。比如用更有代表性的点光源来替代 [Wang et al. 2008; Drobot 2014]，但是不够准确，容易出现 artifacts。Lecocq 等人 [2015] 提出的多边形光源的 Phong 照明的近似，计算足够快，然而他们限制为了 Phong lobes 的旋转对称形状，容易出现 artifacts。

2 2 球面分布

很少有球面分布在能够表示精细的形状的同时，也能够具有很好的积分特性。球谐函数只能用来做低频照明。图形学中最常用的全频分布是旋转对称 lobes，比如 Phong 分布或者球面高斯（也被描述为 von Mises-Fisher distributions），尽管它们比较简单，积分仍然带来一些困难。计算球面高斯需要预计算一个查找表以及一些近似 [Iwasaki et al. 2012; Xu et al. 2014]。另外，设计更精细的分布通常意味着放弃一些简单的特性，例如来自统计的椭圆各向异性（[Bingham 1974; Kent 1982]）没有很好的解析算子。虽然有各向异性球面高斯来提供近似解，但计算它们的归一化因子（球面积分值）也需要复杂的公式，没有比较实际的解决方案。

三 Linearly Transformed Spherical Distributions

3 1 Definition

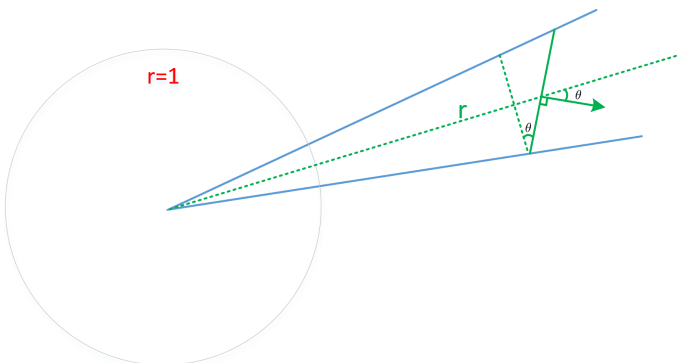
我们本节介绍球面分布线性变换（Linearly Transformed Spherical Distributions (LTSDs)）。通过对它的方向向量应用一个线性变换，我们可以定义新的分布（见论文 Figure 2）。Figure 2 中一开始的分布是球面分布，按照余弦来衰减（就是乘以与法向量夹角的余弦值），然后分别乘以不同的 M，可以看到能够得到不同的分布。也就是说当我们有一种分布时，我们可以尝试求解出一个矩阵 M 来近似这种球面分布。

设 D_o 是初始分布。Figure 3 表示了不同的初始分布应用 M 的效果，每一列分别代表了不同的初始分布。

在本文中，所有的方向向量 ω 都设为单位向量，即：

$$\omega = \frac{M\omega_o}{||M\omega_o||} \tag{三.1}$$

但是，我们想知道变换后的分布和初始分布之间的关系，这个关系的推导可以得到闭式表达式，见论文公式 (1)。推导过程在附录中有，我解释一下：设一开始的正交基（$\omega_o, \omega_1, \omega_2$）以及一个无穷小的立体角 $\partial\omega_o$，对应于 Figure 13 的左边，对其进行线性变换以后，得到一组新的基 $M\omega_o, M\omega_1, M\omega_2$ 和 $\partial\omega$，但是要注意的是，变换后的区域在球面上的投影变为了 Figure 13 中绿色的部分。对于 Figure 13 的右边变换后的示意图中，绿色部分与红色部分之间的对应关系在一维上是：



对于无穷小的面积来说，红色部分投影到球面上的绿色部分的面积就是 $\frac{A\cos\theta}{r^2}$（考虑一下，如果 $r=1$，且 $\theta=0$，则就是 A，即单位球面上的立体角覆盖面积就是立体角大小）。因此：

$$\frac{\partial\omega}{\partial\omega_o} = \frac{\frac{||M\omega_1 \times M\omega_2||\cos\theta}{r^2}}{||\omega_1 \times \omega_2||} \tag{三.2}$$

注意 $||\omega_1 \times \omega_2|| = 1$。

回到球面分布变换上来，分布对于尺度变换 $M = \lambda I$ 来说是不变的，对于旋转变换来说只会改变分布的方向，而不会改变分布的形状。

Median Vector：对于这几个经典的初始分布 D_o，z 向量 $(0,0,1)^T$ 是中值向量，即任何包含该向量的平面都可以把 D_o 切为等权重 $\frac{1}{2}$ 的两部分，这个特性也被变换所保留。在 Figure 2 中所有矩阵的最右边一列都是 $(0,0,1)^T$，中值向量跟 z 轴对齐。例如 Figure 2d，偏斜在一侧挤压分布，在另一侧拉伸分布，而 z 轴仍然是分布的中间值。

3 2 Properties

D_o 的归一化性质在 D 中也会保留。

在多边形上的积分在分布变化前和变化后的值相等（只要是对应于相同的变化后的多边形即可），见公式 (3) 和 Figure 4。

如果 D 可以被重要性采样，那么 D_o 也是可以的，具体可以参考 Algorithm 1。

四 用 LTC 来近似基于物理的 BRDFs

我们可以用 LTC 变换的分布来近似下面红框中的项：

$$\int_{\Omega} L(\omega_i) \boxed{f_r(\omega_i, \omega_o) \cos\theta_i} d\omega_i$$

$$\approx D(\omega_i)$$

我们选择 D_o 初始分布为半球上归一化 clamped 的余弦分布，见公式 (4)。解释一下公式 (4)，注意在局部坐标系下，z 轴是 $(0,0,1)$，因此单位向量 (x,y,z) 与 z 轴的余弦就是 z 值。

我们选择去近似 GGX 微表面分布，目前这是被认为最有真实感的分布。更一般地，我们在光方向 ω_l 的范围内近似余弦加权的 BRDFs，见公式 (5)。$\omega_v = (\sin\theta_v, 0, \cos\theta_v)$ 为入射方向，我觉得应该是 view 方向，中间的 y 值为 0 是因为它是旋转对称的，所以只需要两个变动参数即可。在局部坐标系中，z 轴应该是对应于几何法向量的轴。

各向同性材质的 BRDF 取决于 ω_v 方向和粗糙度参数 α，对于任意组合 (θ_v, α) 我们找到最好的矩阵 M 去拟合它。

GGX 是旋转对称的，所以 LTC 是尺度不变的，因此可以表示为公式 (6)，仅仅需要拟合 4 个参数。经验上我们发现最小化 L^3 误差可以最大化视觉效果。

拟合好以后，只需要存储 M^{-1} 即可（见公式 (3) 的积分，只需要矩阵的逆），一共 4 个参数（每个 M^{-1} 也恰好只需要存储 4 个参数），对于不同的 α 和 θ_v 我们都需要存储结果，因此需要构建一个表，取值时进行插值。对积分（作为 norm）：

$$\int_{\Omega} \rho(\omega_v, \omega_l) \cos\theta_l d\omega_l$$

我们需要额外的 1 个参数，因为对于不同的 ω_v 和 α 的积分值不同（这个 norm 的作用是，我们进行 M 变换后的分布可能并不是归一化的，需要一个归一化因子，后面论文中没有再提到这一点，但是写代码时需要注意），所以也需要用一个表来存储，取值时进行插值。因此，总共 5 个参数。

Figure 5 的小方片上的黑线表示不同的入射方向 θ_v。

五 Linearly Transformed Spherical Distributions

接下来思考积分公式 (7)。对于常量的情况，可以参考公式 (9) 和公式 (10)，由于在多边形上进行积分有闭式表达式（公式 (11)）所以可以直接求解（该闭式表达式对应的 D_o 是 clamped cosine distribution）。这里会假设球面多边形位于上半球。在实际中会将多边形进行裁剪，然后计算贡献和相加。对于不同积分分布之间的转换关系可以参考 Figure 4。

也就是说，对于其他分布对应于另一个积分区间，我们可以用 M^{-1} 矩阵变换到 D_o 分布的一个区间，然后用闭式表达式求解结果。在使用 M^{-1} 时，首先必须根据 θ_v 和 α 来选择相应的 M 矩阵参数，然后

当多项式光源有纹理时，则情况稍微复杂一点。文中将公式 (12) 分解为公式 (13) 和 (14) 相乘，(13) 我们可以用前面的方法求得。公式 (14) 中，I_L 可以被认为是 D 中与 P 相交的区域的平均颜色，我们可以用纹理空间滤波来近似。

公式 (14) 可以理解为纹理 L 通过一个滤波器：

$$F(\omega_l) = \frac{D(\omega_l)}{\int_P D(\omega_l) d\omega_l}$$

我们可以先对光源进行近似的纹理滤波，注意 $\int_P F(\omega_l) d\omega_l = 1$ 是归一化的。为了避免预滤波时越界，先进行扩展，可以参考 Figure 6 的 prefiltered LOD 0。

提取预滤波纹理的难度：需要两个参数，一是纹理坐标，二是 LOD。一个比较简单的方法包括计算纹理空间中分布的平均（或中值）方向的交点的坐标，但这种方法不稳定，有时定义不明确，见 Figure 7(a) 的左图，黑线表示平均方向，与纹理面并没有相交，不能用于提取纹理。另一个困难是适当的 LOD 取决于几个参数：分布的锐度、纹理平面的倾斜度和距离。

用 Cosine Configuration 来简化问题：对于公式 (3) 所示的积分，应用逆矩阵 M^{-1}，见公式 (15)。相当于变换到原始 cosine 空间中然后再提取纹理。这样的好处就是纹理空间的滤波方式都可以用 cosine 来滤波，只需要将新的分布和积分空间变换回去提取纹理即可。

在 Cosine Configuration 中提取预滤波纹理：把着色点正交投影到纹理平面上，注意 Figure 7(a) 左图中的垂直符号。改点是很好地定义的（变换到 cosine 空间中不会被错过）并不管分布 D 是否尖锐都能产生准确的纹理提取结果。

六　代码复现

参考代码可以从网站 [2] 来获取。我们可以把该代码实现到 PBRT 或者一些其他自己写的渲染器上，但我倾向于介绍一下 bgfx 这个计算机图形功能库（官方源码里给出的示例），所以我们放在其他文章里介绍。

参考文献

[1] https://eheitzresearch.wordpress.com/415-2/

[2] https://blog.unity.com/technology/real-time-polygonal-light-shading-with-linearly-transformed-cosines