体渲染的基本原理描述

Dezeming Family

2022 年 12 月 22 日

DezemingFamily 系列书和小册子因为是电子书，所以可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列书，可以从我们的网站 [https://dezeming.top/] 找到最新版。对书的内容建议和出现的错误欢迎在网站留言。

前言

本文的意义在于给出体渲染的辐射度量学公式——光传输方程。并对其中的符号和方法进行一些比较规范和更全面的定义。

一　符号定义

符号说明：

- $\mathbf{x}$ 表示空间上或者表面上的一个点。
- $(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})$ 表示射线从 $\mathbf{x}$ 发出，方向为 $\overrightarrow{\omega}$。
- $(\mathbf{x} \leftarrow \overrightarrow{\omega})$ 表示射线沿着 $\overrightarrow{\omega}$ 方向射向 $\mathbf{x}$。
- $\overrightarrow{\omega}_i$ 表示光入射方向，与表面不同（描述表面点的入射和出射方向时都是对应于离开表面点的方向），是真的代指光入射方向，而非反方向。
- $\overrightarrow{\omega}_o$ 表示光的出射方向。
- $L_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}_o)$ 表示出射方向的光辐射度。
- $(\overrightarrow{\omega}_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}})$ 表示光的方向，从 $\mathbf{x}$ 方向到 $\mathbf{y}$ 方向。

二　光传输事件

参与介质中有三个过程会影响 radiance 的分布：

- 吸收：由于光转换成另一种形式的能量（如热）而引起的 radiance 减少；
- 发射：发光粒子发出 radiance；
- 散射：由于与粒子碰撞而向一个方向散射（根据指定某方向，从该方向散射到其他方向称为外散射，从其他方向散射到该方向称为内散射）。

2 1　吸收

光以 $\overrightarrow{\omega}$ 方向通过单位长度的参与介质以后，携带的能量表示如下（注意，一般来说，$\sigma_a(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})$ 对于任意方向都是定值，因此可以表示为 $\sigma_a(\mathbf{x})$）：

$$L_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) - L_i(\overrightarrow{\omega} \to \mathbf{x}) = dL_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = -\sigma_a(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) L_i(\overrightarrow{\omega} \to \mathbf{x}) dt \tag{二.1}$$

考虑到在积分中 $L_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})$ 和 $L_i(\overrightarrow{\omega} \to \mathbf{x})$ 表示的是同一束光（上式只是为了描述变化率 dL_o），因此可以写为：

$$dL_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = -\sigma_a(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) L_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) dt \tag{二.2}$$

积分以后就得到（假设光从 $\mathbf{x}$ 向 $\overrightarrow{\omega}$ 方向传输距离 d）：

$$L_o((\mathbf{x} + d\overrightarrow{\omega}) \to \overrightarrow{\omega}) = L_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) \cdot e^{-\int_0^d \sigma_a((\mathbf{x}+t\overrightarrow{\omega}) \to \overrightarrow{\omega}) dt} \tag{二.3}$$

因此，光在 $\overrightarrow{\omega}$ 方向通过距离 d 之后剩余的 radiance 占原来的比例为：

$$T_r(\mathbf{x} \leftrightarrow (\mathbf{x} + d\overrightarrow{\omega})) = e^{-\int_0^d \sigma_a((\mathbf{x}+t\overrightarrow{\omega}) \to \overrightarrow{\omega}) dt} \tag{二.4}$$

T_r 符号描述穿透率。T_r 的指数部分用两点间的光学厚度来表示：

$$\tau(\mathbf{x} \leftrightarrow (\mathbf{x}+d\overrightarrow{\omega})) = \int_0^d \sigma_a((\mathbf{x}+t\overrightarrow{\omega}) \to \overrightarrow{\omega})dt \tag{二.5}$$

当介质是 homogeneous 介质时，σ_t 是一个常量：

$$T_r(\mathbf{x} \leftrightarrow (\mathbf{x}+d\overrightarrow{\omega})) = e^{-\sigma_t d} \tag{二.6}$$

2 2　发射

粒子可能会发光，只考虑发射效应时，表示如下：

$$dL_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = L_e(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})dt \tag{二.7}$$

2 3　吸收-发射方程

仅仅考虑体渲染中的吸收和发射项，就能得到吸收发射方程：

$$dL_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = -\sigma_a(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})L_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})dt + L_e(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})dt \tag{二.8}$$

假设光从 $\mathbf{x}$ 向 $\overrightarrow{\omega}$ 方向传输距离 d，得到吸收发射方程的积分式：

$$\begin{aligned} L_o((\mathbf{x}+d\overrightarrow{\omega}) \to \overrightarrow{\omega}) &= L_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) \cdot e^{-\int_0^d \sigma_a((\mathbf{x}+t\overrightarrow{\omega}) \to \overrightarrow{\omega})dt} \\ &\quad + \int_0^d L_e((\mathbf{x}+s\overrightarrow{\omega}) \to \overrightarrow{\omega}) \cdot e^{-\int_0^s \sigma_a((\mathbf{x}+t\overrightarrow{\omega}) \to \overrightarrow{\omega})dt} ds \end{aligned} \tag{二.9}$$

使用 T_r 符号，就可以简化为：

$$\begin{aligned} L_o((\mathbf{x}+d\overrightarrow{\omega}) \to \overrightarrow{\omega}) &= L_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) \cdot T_r(\mathbf{x} \leftrightarrow (\mathbf{x}+d\overrightarrow{\omega})) \\ &\quad + \int_0^d L_e((\mathbf{x}+s\overrightarrow{\omega}) \to \overrightarrow{\omega}) \cdot T_r((\mathbf{x}) \leftrightarrow (\mathbf{x}+s\overrightarrow{\omega})) ds \end{aligned} \tag{二.10}$$

2 4　外散射和衰减

光通过参与介质时，会有散射效应。描述有多少 radiance 能够沿着该方向继续前进表述为：

$$dL_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = -\sigma_s(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})L_i(\overrightarrow{\omega} \to \mathbf{x})dt \tag{二.11}$$

因此总的光衰减系数为：

$$\sigma_t(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = \sigma_s(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) + \sigma_a(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) \tag{二.12}$$

我们定义两个名词，一个是 albedo，直观理解为单位参与介质下，不发光的参与介质的颜色（表示为散射的概率）：

$$\rho = \frac{\sigma_s}{\sigma_t} \tag{二.13}$$

以及 mean free path（平均自由路径长度，即给出了射线在与粒子相互作用之前在介质中传播的平均距离）：$1/\sigma_t$。

描述总的衰减效应的微分方程表示如下：

$$\frac{dL_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})}{dt} = -\sigma_t(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})L_i(\overrightarrow{\omega} \to \mathbf{x}) \tag{二.14}$$

2 5 相位函数

相位函数描述了辐射度从一个方向到另一个方向的分布比例（$\mathcal{S}^2$ 表示整个球面）：

$$\int_{\mathcal{S}^2} p(\overrightarrow{\omega} \to \mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}')d\overrightarrow{\omega}' = 1 \tag{二.15}$$

注意和 BSDF 是有很大不同的，BSDF 要求：

$$\int_{\mathcal{H}^2} f(\overrightarrow{\omega} \to \mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}')d\overrightarrow{\omega}' \leq 1 \tag{二.16}$$

因为 BSDF 包含了表面 albedo 这种吸收项。而相位函数仅仅只表示一个比例。

2 6 内散射

外散射是向外发射 radiance，而内散射表示的是其他方向的 radiance 发射到当前 ω 方向：

$$dL_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = L_s(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})dt \tag{二.17}$$

L_s 是关于发射和内散射的 radiance：

$$L_s(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = L_e(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) + \sigma_s(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) \int_{S^2} p(\overrightarrow{\omega}_i \to \mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) L_i(\overrightarrow{\omega}_i \to \mathbf{x}) d\overrightarrow{\omega}_i \tag{二.18}$$

相位函数不包含任何与吸收或者能量损失的成分，因为后面的积分项只与散射有关，所以积分值还需要乘以 $\sigma_s(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})$ 才是最终的内散射项。

三 辐射传输方程

使光增强的组件：

$$dL_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = \Big(L_e(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) + \sigma_s(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) \int_{S^2} p(\overrightarrow{\omega}_i \to \mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) L_i(\overrightarrow{\omega}_i \to \mathbf{x}) d\overrightarrow{\omega}_i\Big)dt \tag{三.1}$$

使光衰弱的组件：

$$dL_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = -\Big(\sigma_s(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) + \sigma_a(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})\Big) L_i(\overrightarrow{\omega} \to \mathbf{x})dt \tag{三.2}$$

把这两项合并起来，就能得到辐射传输方程（下式是简写）：

$$dL_o(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) = \Big(-\sigma_t(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega}) L_i(\overrightarrow{\omega} \to \mathbf{x}) + L_s(\mathbf{x} \to \overrightarrow{\omega})\Big)dt \tag{三.3}$$

$L_i(\overrightarrow{\omega}_i \to \mathbf{x})$ 我们还没表示，但我们可以比较容易地写出来：

$$L_i(\overrightarrow{\omega}_i \to \mathbf{x}) = \int_0^\infty T_r(\mathbf{x} \leftrightarrow (\mathbf{x} - t\overrightarrow{\omega}_i)) L_s(\overrightarrow{\omega}_i \to (\mathbf{x} - t\overrightarrow{\omega}_i))dt \tag{三.4}$$

L_i 和 L_o 只是不同的表示形式而已，最终我们求解的目标就是某点到某个方向的辐射度，也就是求解这个积分式。

参考文献

[1] Pharr M, Jakob W, Humphreys G. Physically based rendering: From theory to implementation[M]. Morgan Kaufmann, 2016.

[2] 吴东东. 基于 Woodcock 跟踪的高效散射介质绘制算法的研究与实现 [D]. 浙江大学, 2014.