

# A null-scattering path integral formulation of light transport

Dezeming Family

2023 年 11 月 2 日

DezemingFamily 系列文章和电子书**全部都有免费公开的电子版**，可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列电子书，可以从我们的网站 [<https://dezeming.top/>] 找到最新的版本。对文章的内容建议和出现的错误也欢迎在网站留言。

## 目录

<b>一 介绍</b>	<b>1</b>
<b>二 RADIATIVE TRANSPORT BACKGROUND</b>	<b>1</b>
<b>三 NULL-SCATTERING PATH INTEGRAL FORMULATION</b>	<b>1</b>
<b>四 NULL-SCATTERING PATH INTEGRAL DERIVATION</b>	<b>1</b>
4.1 Operator formulation . . . . .	1
4.2 Scattering chain decomposition . . . . .	2
4.3 Change of variables . . . . .	2
4.4 Path integral formulation . . . . .	2
<b>五 APPLICATIONS</b>	<b>2</b>
5.1 Monte Carlo estimators for the path integral . . . . .	2
5.2 Path sampling techniques . . . . .	3
5.3 Handling chromatic media . . . . .	3
5.4 Unidirectional path tracing . . . . .	3
5.5 Bidirectional path tracing . . . . .	3
<b>六 小结</b>	<b>3</b>
<b>参考文献</b>	<b>3</b>

## 一 介绍

零碰撞采样拒绝过程不能计算路径概率密度，因此难以将多种采样技术通过 MIS 组合起来。[Galtier 2013] 展示了如何从 RTE 中导出这些算法。

在此之前，由于零碰撞算法没法求概率密度，因此没法结合 MIS 等更高级的技术。Heterogeneous media 的采样要么放弃 MIS 方法 ([Kutz et al. 2017])，要么放弃零碰撞方法 ([null-collision methods]) 以支持 regular tracking 或者 tabulated 采样，使得可以支持 MIS 技术。

我们将零散射 RTE 转换到泛化的零散射路径积分公式，我们的技术允许无偏采样和解析的 pdf 计算。

## 二 RADIATIVE TRANSPORT BACKGROUND

这里我有点好奇的是，既然说没法求概率密度，那 PBRT 里使用的 Wenzel 的双向路径追踪技术中的双向路径追踪方案的概率密度是怎么计算的。时间太长，也忘了具体的技术了，但我印象里是把采样方向的概率密度当作了采样到某个点的概率密度，这样是否会导致出现概率上的错误呢，我个人认为是会有错误和偏差的。毕竟使用零碰撞时，如果根据 PBRT 中只记录真实散射点的位置，那么一个点散射到另外一个点的概率密度（不止跟采样方向有关，还需要计算透射率有关）就不得而知了。

公式 (8) 得到的是组合的介质辐射度计算公式，现在包括零散射部分，现在相当于每个部分都是被独立加权的。

## 三 NULL-SCATTERING PATH INTEGRAL FORMULATION

这里类似于《Light Transport on Path-Space Manifolds》中的描述。

通过这种表示方法（公式 (16)-(19)），可以将穿透率这一项取代为组合的穿透率  $\bar{T}$ 。注意对于所有颜色组件都使用同一个路径积分公式，也就是说可以给每个颜色通道不同的零散射系数  $\mu_n$ 。

公式 (19) 我下载的版本里写错了， $\mathbf{x}$  写成了  $\mathbf{y}$ 。

根据 Figure 4 可以看出，以前的路径积分方程只考虑真实的穿透率项，而现在会考虑到中间的零散射位置。

这种表示比较巧妙的一点就是不再会出现难以估计概率密度的情况，而是把整个散射和碰撞的计算都纳入到了同一个框架中。

## 四 NULL-SCATTERING PATH INTEGRAL DERIVATION

之前的工作 ([Pauly et al. 2000; Jakob 2013]) 都是只考虑把真实散射事件纳入到 VRE(volume rendering equation) 中，这里我们将零散射事件也纳入进来，得到了更有泛化性的公式。公式 (9) 就是完整的包含零散射的 VRE 形式，但它的展开相对比较复杂，意味着本节难度很高。

不考虑物体表面的零散射（比如透明物体），可以把 VRE 写成公式 (20) 的形式，其实这个形式比前面的公式 (16)-(19) 更好理解一些，只是在原来的体渲染方程中增加了一个零散射项。

### 4.1 Operator formulation

注意公式 (21) 如果不好理解，可以将  $h$  是  $L$  代入进去，就会发现这可以理解为是一个递归式。公式 (23) 和 (24) 中，将  $L$  替换  $h$  代入到  $\mathbf{N}$  就可以看出  $\mathbf{N}$  其实就是 VRE 的零散射部分。

公式 (26) 相当于一个递归展开式， $S_k$  表明发生  $k$  次散射（包括零散射和真实散射）。

注意公式 (27) 的积分中， $d\mathbf{x}$  意味着是对一个像素的面积进行积分。

## 4 2 Scattering chain decomposition

注意  $\mathbf{R}_s$  代表表面散射算子，因此  $\mathbf{R}_s\mathbf{N}$  意味着先零散射再发生表面散射，这是不被允许的（表面不会发生零散射），所以公式 (29) 中消去了一些项。这意味着  $\mathbf{N}_s$  只会在零散射链的末尾起作用。

为了更好地理解，我这里更详细地写一下这些公式（为了方便，用  $\mathbf{x}_n$  的下标形式）。首先是下面的公式，意味着将一条线上的  $h$  值进行积分：

$$\begin{aligned}(\mathbf{N}_m h)(\mathbf{x}_1, \omega) &= \mu_n(\mathbf{x}_1) \int_{x_1}^z \bar{T}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) h(\mathbf{x}_2, \omega) dx_2 \\(\mathbf{N}_m h)(\mathbf{x}_2, \omega) &= \mu_n(\mathbf{x}_2) \int_{x_2}^z \bar{T}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) h(\mathbf{x}_3, \omega) dx_3\end{aligned}$$

然后扩展到两次， $(\mathbf{N}_m\mathbf{N}_m h)(\mathbf{x}_1, \omega)$ ，这个转换过程容易把人绕晕，但从直觉上来说，这个过程其实就是积累零散射的穿透率。这个过程就是几次散射都是零散射，沿着直线进行套娃。

$$(\mathbf{N}_m\mathbf{N}_m h)(\mathbf{x}_1, \omega) = \mu_n(\mathbf{x}_1) \int_{x_1}^z \bar{T}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mu_n(\mathbf{x}_2) \int_{x_2}^z \bar{T}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) h(\mathbf{x}_3, \omega) dx_3 dx_2 \quad (四.1)$$

这样大家应该就能看懂公式 (31) 是怎么来的了。

公式 (32) 到 (33) 的转换是为了将最外层设置对真实散射点的积分，使得这个积分其实可以不依赖于内部的零散射点的位置。

至于公式 (34)，我们可以先看一下  $(\mathbf{N}_m\mathbf{N}_s h)$  的结果，不再赘述。

## 4 3 Change of variables

经过一些表示的替换，得到了公式 (37) 和 (38)，这个公式给出了两个真实散射事件的吞吐量。

## 4 4 Path integral formulation

公式 (40) 相当于是综合了前面的过程和步骤，得到了一个路径估计式，注意这个估计式的概率密度是可以计算的，因为采样的是  $\bar{\mu}$ 。

# 五 APPLICATIONS

我们在第 3 节中的光传输公式提供了一个框架，用于设计新的并将现有的无偏体绘制方法表示为路径积分的直接蒙特卡罗估计量。在我们的框架中，相应采样技术的 pdf 是已知的，这使得能够以简单的方式应用多重重要性采样（MIS），这在以前被认为是困难的。

为了展示我们框架的功能，我们描述了一种实用的路径跟踪算法，该算法结合了单向和下一事件采样技术。我们还结合了 hero wavelength MIS 来处理光谱变化的介质（Hero wavelength spectral sampling[2014 CGF]）。

## 5 1 Monte Carlo estimators for the path integral

比较基础的采样方法，可以使用 MIS 将不同的路径混合，只需要能够计算不同采样方法下的生成任意路径的概率密度即可。

5 2 Path sampling techniques

5 3 Handling chromatic media

5 4 Unidirectional path tracing

5 5 Bidirectional path tracing

## 六 小结

如果觉得这篇论文比较难以掌握，可以配合 PBRT 书来阅读，这本书有符号更容易理解描述。

## 参考文献

[1]