

Free Path Sampling in High Resolution Inhomogeneous Participating Media

Dezeming Family

2023 年 10 月 29 日

DezemingFamily 系列文章和电子书**全部都有免费公开的电子版**，可以很方便地进行修改和重新发布。如果您获得了 DezemingFamily 的系列电子书，可以从我们的网站 [<https://dezeming.top/>] 找到最新的版本。对文章的内容建议和出现的错误也欢迎在网站留言。

目录

一 介绍	1
二 EXISTING TRACKING ALGORITHMS	1
三 RADIATIVE TRANSFER WITH NULL COLLISIONS	2
3 1 零碰撞追踪	2
3 2 Integral Formulation of Tracking Methods	2
3 3 Delta 追踪	2
3 4 Weighted Delta Tracking	2
四 DECOMPOSITION TRACKING	3
4 1 Analog Decomposition Tracking	3
4 2 Weighted Decomposition Tracking	4
4 3 Analysis and Discussion	4
五 SPECTRAL TRACKING	4
5 1 Collision Probabilities	4
5 2 Spectral and Decomposition Tracking	5
六 Evaluation	5
参考文献	5

一 介绍

摘要

我们提出了两种新的无偏技术，用于在异构参与介质中对自由路径进行采样。我们的分解跟踪 (decomposition tracking) 通过将介质分解为【控制分量】和【残差分量】并分别对它们进行采样来加速自由路径的构建。为了最大限度地减少对空间变化的碰撞系数的昂贵的估计，我们设计了控制组件，以允许以闭合形式构建自由路径。然后通过添加粘性介质 (fictitious medium) 对剩余的异质组件进行均质化，并使用加权 delta 跟踪进行处理，这消除了计算消光函数严格边界 (strict bounds) (就是不需要再计算体素中的最大最小消光系数值) 的需要。

我们的第二个贡献，光谱跟踪，能够在彩色介质中进行有效的光传输模拟。我们修改自由路径分布以最小化路径吞吐量的导出，从而降低估计方差。为了证明我们算法的正确性，我们通过扩展最近在反应堆物理学中开发的零碰撞算法的积分公式，直接从辐射传输方程中推导出它们。

我们彻底回顾了数学框架，它包含了现有的跟踪器，并假设了一整套用于解决运输问题的新估计器。我们分析了在规范设置和生产场景中提出的方法，并与当前在异构参与介质中模拟光传输的技术状态进行了比较。

引言

我们提出通过将散射介质分解为均匀控制分量 (homogeneous control component) 和非均匀残差分量 (heterogeneous residual component) 来加速 delta 跟踪。然后，仅使用一个组件来构建单独的自由路径或其线段。如果使用控制分量，则计算是完全分析的，并且我们避免了昂贵的内存查找或过程评估，从而使构建路径的成本保持在较低水平。之前在透射率估计的背景下探索了类似的分解 [Novák et al. 2014]；我们研究了 this 概念在自由路径采样中的应用。

我们还解决了有效处理波长相关碰撞系数的挑战。我们分析了加权跟踪 (weighted tracking) 的几种矢量化变体 (vectorized variants)，并提出了一种历史感知策略 (history-aware strategy) 来设置碰撞概率，以防止路径吞吐量的几何增长。为了证明我们的技术是无偏的，我们使用 [Galtier 2013] 最近提出的零碰撞算法的积分公式，直接从辐射传输方程 (RTE) 中推导出它们。这个数学框架定义了一个完整的、基本上未经探索的蒙特卡罗方法家族，用于求解异质介质中的辐射传输，为开发新的实用算法提供了机会，我们的分解和光谱跟踪器就是其中的例子。如果不是不可能的话，在使用物理解释假设算法时，这样的改进是很难实现的。相反，我们直接从 RTE 中导出跟踪器，从而消除了对更复杂的数学证明 (比如这两个复杂的证明 [Coleman 1968; Miller 1967]) 的需要。

在论文下文中，我们回顾了用于构建自由路径的几种现有跟踪器 (第 2 节)，重新驱动 Galtier 等人对 RTE 的重新表述 (第 3 节)，并讨论了导致许多已知的、先前发表的算法的配置。然后，我们引入了将散射介质分解为更有效地采样自由路径的概念 (第 4 节)。出于教学目的，我们从一个直观的、尽管有限制的解决方案开始，稍后我们通过直接推导 RTE 来推广该解决方案。由此产生的算法通过解析地获得一些自由路径样本来减少对空间变化系数的评估。我们使用互补方法进一步改进了算法，以有效处理与波长相关的碰撞系数 (第 5 节)。我们单独分析了各个技术，并在规范设置和真实渲染场景中结合在一起 (第 6 节)，展示了与现有方法相比性能提高的多个方面。

二 EXISTING TRACKING ALGORITHMS

Closed-form Tracking、Regular Tracking、Ray Marching、Delta Tracking、Weighted Tracking、Multi-volume Tracking、Multi-wavelength Tracking。

Weighted Tracking: 减少零碰撞的另一种方法是允许组合系数偶尔低于实际消光系数。为了保持无偏，得到的非模拟估计器必须适当地重新加权进入零碰撞系数负值区域的样本。还提出了各种加权方案，以通过用统计权重代替拒绝来人为地增加测量区域中的碰撞率，或确保自由路径在深穿透问题中达到一定距离和透射率计算 [Novak 2014]。[Eymet 2013] 研究了将加权跟踪与能量分配相结合的好处。

Multi-volume Tracking: 到目前为止，我们只考虑由单个空间变化介质组成的散射体。对于由于多次跃迁 (multiple transitions) 而可能发生吸收的材料，[Galtier 2016] 提出通过仅对总和中的单个项进行概率评估来降低跟踪成本。我们将这一概念与控制/残差分解相结合，后者 [Novak 2014; SzirmayKalos 2011] 是为透射率估计而提出的。由于其乘法性质，透射率可以计算为每个分量估计的乘积，如果仔细选择分解，可以减少方差。我们对自由路径采样的应用 (第 4 节) 依赖于不同的理论调整，并且，我们没有减少样本方差，而是减少了每个样本的成本。

Multi-wavelength Tracking: 光谱变化的碰撞系数需要特殊处理。[Raab 2008] 建议尽可能避免波长相关的消光系数，并在其他方面跟踪每个波长的单独光路 [Eymet 2013]。在后一种情况下，跟踪成本随着波长的数量线性增长。将多个波长跟踪在一起可以提高效率并减少分散注意力的颜色噪声。[Wilkie 2014] 描述了一种技术，其中选择单个“hero”波长进行路径构建，携带二次波长 (secondary wavelengths)，并使用多重要性采样 (MIS) 将其 (潜在的高) 方差保持在较低水平。[Chiang 2016] 也使用了类似的方法，他们从每波长吞吐量和单次散射反照率推导出波长选择概率。这些技术在均质介质中效果良好。hero 波长方法可以扩展到异构体，然而，它使用 delta 跟踪和 ray marching 来计算单个自由路径样本，并且所提出的实现方式存在偏差。相比之下，我们的多波长跟踪 (第 5 节) 是无偏的，不需要明确选择 hero 波长。我们还讨论了允许组合多路径构建策略的情况，该策略使用基于无偏拒绝的跟踪器，使用 MIS 而不显式地估计或近似估计距离 PDF。

三 RADIATIVE TRANSFER WITH NULL COLLISIONS

3 1 零碰撞追踪

公式 (2) 可以理解为，零散射的光会被全部衰减。
综合得到公式 (4)。

3 2 Integral Formulation of Tracking Methods

公式 (5) 是定义的某个概率密度函数，然后当把它代入到公式 (4) 中，可以得到公式 (6)。注意公式 (6) 是一个非常有趣的公式，可以看到 $\bar{\mu}$ 在所有项的分子上，而且这个概率密度函数 $p(t)$ 是很容易进行采样 t 值的，因为 $\bar{\mu}$ 填充虚拟粒子后在空间上是常数。

解释一下公式 (7)，其实我们不难发现，这里只是把公式 (6) 的 t 改成了 t_j ，并且增加了几个概率分别表示发射、吸收和散射。并且，这个形式可以很容易改写成通过蒙特卡洛方法来估计。

这里又用一个概率表示函数 (8) 来代替到公式 (7) 中，以得到公式 (9)，公式 (9) 就可以用于递归地估计求解光传输。不管 P_a, P_s, P_n 如何选，都能得到正确的估计结果。从公式 (9) 可以直接导出两种技术：Delta 追踪和 Weighted Delta 追踪。

3 3 Delta 追踪

我觉得这里的 Delta 追踪很难保证效率，是因为它要么吸收，要么散射。如果当前点是吸收，那么就只计算发射的光。对于不自发光的体，可以用 $\frac{\mu_s}{\mu_t}$ 作为当前点的散射概率 (如果有了解过 PBRT，应该知道此时需要将 $\frac{\mu_s}{\mu_t}$ 乘到 β 上)，然后计算直接光照着色。

3 4 Weighted Delta Tracking

加权追踪技术其实是根据当前的散射特性来设置下一次采样自由路径的权重特性。

使用加权 MC 方案可以不用再去找紧凑的 majorants (μ_t 的最大值)。

公式 (15) 和 (16) 要借助伪代码来理解，比较容易。现在我介绍一下使用加权追踪的好处：如论文 Figure 4 所示，当采样射线进入到体空间时，一旦 $\mu_t(\mathbf{x}) > \bar{\mu}$ ，就会导致权重变高大于 1。注意为什么权重

是 1 呢：

$$\frac{\mu_s(\mathbf{x}_j)}{\bar{\mu}(\mathbf{x}_j)P_s(\mathbf{x}_j)} = \frac{\mu_s(\mathbf{x}_j)}{\bar{\mu}(\mathbf{x}_j)} \times \frac{1}{P_s(\mathbf{x}_j)} = \frac{\mu_s(\mathbf{x}_j)}{\bar{\mu}(\mathbf{x}_j)} \times \frac{\bar{\mu}(\mathbf{x}_j)}{\mu_s(\mathbf{x}_j)} = 1 \quad (\text{三.1})$$

可以看到 (a) 和 (b) 中的 $\text{density} \times \text{weight}$ 值是一样的（注意左边的被紫色线盖住了，需要放大看才能看出来），但右边的方差会大一些，因为权重也会有方差。不过，可以看出，零碰撞的次数变低了，这是因为 $\bar{\mu}$ 比较低的缘故。

四 DECOMPOSITION TRACKING

解耦追踪来自于 [Novák et al. 2014] 的解耦技术。

4.1 Analog Decomposition Tracking

我们观察到通过采用在独立的组件中的 free-path samples 的最小值可以得到一个 free-path sample。这一概念如论文 Figure 5 所示，通过考虑光线与两组独立粒子的第一次碰撞，可以直观地理解。如果我们与两个集合的并集相交，那么只有在离任一集合的第一个或最小自由距离处的碰撞才是真正重要的。这类类似于在曲面渲染中查找最近的命中。我们现在将严格证明，通过取最小值获得的自由路径样本，是遵循期望的分布的。这个证明的扩展版本可以在补充材料中找到。

Theorem 1 说明了一个问题： C 的 CDF 和 $\min(A, B)$ 是一致的。

公式 (17) 的证明如下 [1]：

这里说，两个随机变量 X_1, X_2 的最大值 $\max(X_1, X_2)$ 的分布是这两个随机变量分布的乘积

为什么？

$$\begin{aligned} \text{令 } Z &= \max(X_1, X_2), \\ P(Z \leq x) &= P(\max(X_1, X_2) \leq x) = P(X_1 \leq x \text{ 且 } X_2 \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \end{aligned}$$

那么两个随机变量的最小值分布 是怎么样子的呢？

$$\begin{aligned} \text{令 } Z &= \min(X_1, X_2), \\ P(Z \leq x) &= P(\min(X_1, X_2) \leq x) = P(X_1 \leq x \text{ 或 } X_2 \leq x) \\ &= 1 - P(X_1 > x \text{ 且 } X_2 > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \leq x))(1 - P(X_2 \leq x)) \\ &= P(X_1 \leq x) + P(X_2 \leq x) - P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \end{aligned}$$

这里是需要这么考虑的：

$$\begin{aligned} P(\min(A, B) \leq x) &= 1 - P_A(A > x)P_B(B > x) \\ &= 1 - (1 - P_A(A \leq x))(1 - P_B(B \leq x)) \end{aligned} \quad (\text{四.1})$$

由理论 1 可以得到新的采样方法，我们为每个组件创建自由路径样本，并简单地取其中的最小值来获得组合估计。然而，该证明需要假设 A、B 和 C 根据透射率分布，即它们服从由负光学厚度参数化的指数分布。因此，我们可以仅将上述基于最小值的组合与模拟跟踪器 (analog tracker) 一起使用；产生任意加权分布的加权跟踪器必须单独组合。

模拟跟踪器需要保证控制消光项 μ_t^c 不能大于 $\mu_t(\mathbf{x})$ 的最小值，以保证残差系数必须大于 0。

伪代码简单易懂，所以不再赘述。但是这里有需要特别注意的地方：考虑到分解需要绘制两个自由路径样本，它可能看起来不如原始体积中的增量跟踪有效。然而，一个简单的短路优化可以节省计算和大多数昂贵的消光系数查询。我们首先对控制部件中的自由路径进行解析地采样。然后，我们使用 Delta 跟踪在残差分量中构造自由路径，但一旦 Delta 跟踪器超过控制自由路径，我们就会停止并返回控制样本（这是因为控制部分一定是实心的，要么发生吸收要么发生散射，不会出现零碰撞的情况，从某种程度上来说，控制部分的自由路径的位置也相对比较“远”）。这避免了在残差分量中完成自由路径采样所需的查找。

问题也显而易见：如果体素内的消光最小值是 0，那么控制系数只能设置为 0，导致退化为 Delta 追踪。而且它依赖于 Delta 追踪，因此只能处理单波长。

4.2 Weighted Decomposition Tracking

先前版本的加权追踪的目的是给发射、散射和零散射部分分别赋以不同的权重，并以概率形式进行追踪。由于加权追踪中可以设置比较低的 μ_n ，因此降低了零散射的概率。

加权解耦追踪的意义是在加权的基础上将解耦追踪（控制组件 + 残差组件）纳入进来。

将原先的吸收和散射组件拆分成 k 份，得到公式 (19)。然后可以写成概率形式的公式 (20)。假设 k 是 2，意味着需要追踪 5 项，即发射和内散射的控制项、发射和内散射的残差项，以及零碰撞项。

然后我们定义控制概率和残差概率。和之前的加权追踪一样，我们强制这五个项的概率之和为 1，以使得可以在估计时使用分支，也是使得局部碰撞权重接近于 1。控制权重的采样使用常量系数，这样的好处是如果直接在控制项采样时发生了碰撞，就不用再去查找当前位置的残差项了。

注意公式 (21) 和 (22) 表明 $\bar{\mu} > \mu_t^c$ ， $\mu_t^c = \mu_a^c + \mu_s^c$ 是控制项。再重申一下 $\bar{\mu}$ 是在加权解耦追踪用来采样自由路径长度中的一个量。

剩下三个项（两个残差项加一个零碰撞项）的概率密度就比较容易计算了，这里的方式是把 $(1 - (P_a^c + P_s^c))$ 的部分根据当前位置的残差项的绝对值进行分配概率（当然这个概率是可以随便分配的，只要保证每一项都大于 0，并且这五个项的和为 1 即可，只是我们这里的设置方式从直觉上来说跟路径采样更有关，可能结果会更好的样子）。

4.3 Analysis and Discussion

这一节就是一些验证性的内容了，跟具体算法没有太大关系。

五 SPECTRAL TRACKING

即使距离样本的分布不符合比尔定律 (Beer's law)（就是说采样的自由路径分布不符合根据消光衰减的概率密度分布），加权跟踪也可以产生正确的结果：通过适当地重新加权样本来抵消分布中的偏差。这也可以用来处理光谱问题。

我们为采样碰撞定义了一个单一分布，并通过重新加权来抵消该分布与真实的全波长自由路径分布之间的差异。对于所有波长，我们只调用跟踪器一次，并且在每次碰撞时，我们计算光谱解析的碰撞权重。权重可以用光谱基 (spectral basis) 表示，也可以简单地用 N_λ 波长的矢量表示：我们在所有实验中都使用三种原色——红色、绿色和蓝色，但我们的公式和证明适用于任意数量的光谱。连续光谱可以通过每个路径携带一组离散的波长来处理，例如通过使用 [Wilkie 2014] 提出的波长选择和绑定技术。论文的算法 4 显示了矢量化加权 delta 跟踪，用于对 RGB 消光系数独立变化的介质中的（加权）自由路径进行采样。

自由路径采样系数 $\bar{\mu}$ 要尽可能接近所有光谱中的最大值 $\mu_t(\mathbf{x}, \lambda)$ 。

5.1 Collision Probabilities

光谱追踪的方差很大程度上依赖于 spectrally resolved 碰撞权重。由于我们不能设置碰撞概率使得同时取消所有波长的分数 $\frac{\mu_\star(\mathbf{x}, \lambda)}{\bar{\mu}(\mathbf{x})}$ ，因此权重会不可避免地偏离 1。最糟糕的情况莫过于 $P_\star(\mathbf{x}) \ll \frac{\mu_\star(\mathbf{x}, \lambda)}{\bar{\mu}(\mathbf{x})}$ 使得 $|w_\star(\mathbf{x}, \lambda)| \gg 1$ 。如果存在多个这样的碰撞，则该波长的路径吞吐量将以几何级数增长。然而，通过仔细设置碰撞概率，我们可以约束局部碰撞权重以及路径的吞吐量。

文章给了两种选择 P_a 和 P_s 的方法，不是很难理解，所以不再赘述。

5.2 Spectral and Decomposition Tracking

光谱追踪也可以跟解耦追踪放在一起用，找出比较合适的控制项即可。

六 小节

光谱追踪技术主要在于通过加权的方式，使得采样自由路径的点的分布虽然不符合每个光谱的自由路径分布，但加权后就能使得估计的结果是无偏的。

参考文献

- [1] <https://zhuanlan.zhihu.com/p/654413874>